UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

MÉMOIRE D'ÉTUDIANT

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

CRT-612

PROBLÈMES STOCHASTIQUES DE TOURNÉES DE VÉHICULES

par

René Séguin*

* Département d'Informatique et de Recherche opérationnelle et Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication #612
Décembre 1988

Dépôt légal - 1er trimestre 1989

RÉSUMÉ

Les problèmes stochastiques de tournées de véhicules (PSTV), autant ceux avec contraintes de capacité que ceux sans contraintes, constituent un domaine de recherche récent mais de plus en plus étudié. Ces deux catégories de problèmes sont en fait des généralisations de problèmes déterministes de tournées de véhicules (PTV) et de voyageur de commerce (PVC). La caractéristique commune de tous les PSTV est l'inclusion explicite d'éléments probabilistes dans leur définition. En plus de l'intérêt théorique qu'ils représentent, les PSTV possèdent une multitude d'applications importantes et sont très souvent des modèles beaucoup plus réalistes que leur contrepartie déterministe.

Nous allons définir et étudier les problèmes stochastiques de voyageur de commerce (PSVC) et les problèmes stochastiques de tournées de véhicules (PSTV). Pour chaque cas, nous verrons quels types particuliers de problèmes ont déjà été étudiés et quelles approches les chercheurs ont utilisées. Finalement, nous examinerons certaines voies qui restent à explorer.

Mots-clés : tournées de véhicules, voyageur de commerce; programmation stochastique; processus de décision markoviens.

1) INTRODUCTION

Tout au long des deux dernières décennies, les problèmes d'optimisation combinatoire, et plus particulièrement les problèmes reliés au transport, constituèrent sans conteste une des branches des mathématiques appliquées des plus stimulantes et qui connut l'une des plus rapides croissances. Parmi les développements majeurs de cette période, on retrouve, entre autres: la spécification de règles pour classifier et évaluer la difficulté des problèmes d'optimisation combinatoire (ex.: la définition des problèmes P-complets et NP-complets); l'amélioration significative de la compréhension de la complexité des algorithmes et de l'évaluation des performances d'un algorithme; la réussite des recherches, sur plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire intéressants et importants, grâce à l'utilisation d'approches exactes ou approximatives souvent assez ingénieuses; et finalement, l'application de ces concepts et de ces solutions dans une large variété de contextes avec des résultats pratiques souvent très satisfaisants. Il est superflu de mentionner que la littérature scientifique à ce sujet s'est développée à un rythme très rapide. Des exemples d'un intérêt certain pour ce travail sont les ouvrages suivants: pour les problèmes de voyageur de commerce (PVC), Lawler et al. [1985] ; pour les problèmes de tournées et d'horaire, Bodin et al. [1983] ; et pour les problèmes de tournées de véhicules (PTV), Golden et Assad [1988] et Laporte et Nobert [1987] . Chacun des trois premiers ouvrages contient plusieurs centaines de références; c'est donc dire que ces domaines de recherche (PVC, PTV et problèmes d'horaires) ont été passablement étudiés.

Dans ce travail nous nous intéresserons à une famille plus spécifique de problèmes d'optimisation combinatoire qui ont comme caractéristique commune, l'inclusion explicite d'éléments probabilistes dans leur définition. La raison principale qui nous motive à étudier l'effet de cette inclusion, c'est le désir de formuler et d'analyser des modèles qui sont plus appropriés aux problèmes de la vie courante, dans lesquels le hasard n'est pas seulement un élément constitutif, mais aussi un souci majeur. Il existe une multitude d'applications importantes et intéressantes des problèmes d'optimisation combinatoire probabilistes (POCP), et spécialement dans le domaine des transports, domaine qui retiendra plus particulièrement notre attention. On peut mentionner la planification stratégique des services de collecte ou de distribution et des systèmes de transport et de communication. Pour de telles applications, la nature probabiliste des

modèles rend ceux-ci particulièrement attirants en tant qu'abstractions des systèmes réels.

1.1) Champ d'étude.

Dans cette section nous allons définir brièvemement les problèmes étudiés dans ce rapport. La discussion sera plus informelle que mathématique et on essaiera plutôt de fournir au lecteur une compréhension intuitive des problèmes et du raisonnement qui a mené à leur définition. Des modèles détaillés et plus formels seront présentés dans les sections 2 et 3, ainsi que des analyses pour chaque problème particulier.

Considérons, de façon générale, un cas particulier initial d'un problème d'optimisation combinatoire. Dans plusieurs applications, le problème doit être résolu sur une base régulière pour des cas particuliers légèrement modifiés par rapport au cas inital. La première approche qui nous vient à l'esprit est de résoudre de façon optimale chaque cas particulier, c'est-à-dire de ré-optimiser. Cependant, cette approche recèle plusieurs difficultés. Si le problème considéré est NP-difficile, nous aurons alors à résoudre plusieurs cas particuliers d'un problème difficile. De plus, dans plusieurs applications, on a besoin, très rapidement, d'une solution au nouveau cas particulier, mais sans que l'on possède les ressources informatiques nécessaires.

Devant ces contraintes, on se voit dans l'obligation d'utiliser une stratégie différente. Plutôt que de résoudre de façon optimale chaque cas particulier, on trouve une solution a priori au cas particulier initial et ensuite on utilise une stratégie efficace pour adapter la solution afin qu'elle corresponde au cas particulier légèrement modifié. Evidemment, deux questions se posent: sur quel critère se base-t-on pour trouver une solution a priori et quelle stratégie doit-on utiliser pour adapter cette solution aux cas particuliers?

La discussion précédente est générale, c'est-à-dire qu'elle s'applique à n'importe lequel des problèmes d'optimisation combinatoire. Donc, pour répondre de façon concrète aux questions soulevées antérieurement, nous allons nous restreindre aux problèmes de réseau. Considérons le réseau complet $G = (V,E)$ avec n noeuds, pour lequel on a défini un problème d'optimisation (par exemple,

le PVC). Il y a alors 2^n cas particuliers au problème, c'est-à-dire tous les sous-ensembles possibles S de V. Supposons que chaque sous-ensemble S a une probabilité p(S) de se réaliser. Si on utilise la stratégie T_p pour adapter la solution a priori y, alors cette stratégie produit, pour le cas particulier S, une solution réalisable $x_y(S)$ de valeur $L_y(S)$ (dans le cas du PVC, elle produit un tour). Lorsque la stratégie T_p est sélectionnée, le choix naturel pour la solution a priori y_p est de prendre la solution a priori qui a le coût espéré minimal. Le coût espéré étant défini par:

$$\mathbb{E}\left[L_y\right] = \sum_{S \subseteq V} p(S) L_y(S). \qquad (1.1)$$

Ce choix de la solution a priori répond à la première question que nous avions soulevée. Au sujet de la deuxième, on peut se demander quelles propriétés la stratégie T_p doit posséder. La propriété la plus souhaitable de T_p serait que $L_{y_p}(S)$ soit "proche" de la solution optimale $L_{opt}(S)$ pour tous les cas particuliers S. Une propriété moins restrictive et plus globale serait d'exiger que $\mathbb{E}\left[L_{y_p}\right]$ soit "proche" de la longueur optimale espérée définie par:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{S \subseteq V} p(S) L_{opt}(S). \qquad (1.2)$$

De plus, la stratégie T_p devrait produire des solutions qui sont facilement "adaptables" d'un cas particulier à un autre. Nous verrons plus loin, dans les sections 2 et 3, différentes stratégies pour chaque type de problème. Maintenant que nous avons discuté du fondement des problèmes probabilistes, nous allons décrire de façon informelle les différents types de problèmes qui retiendront notre attention.

1.2) Problèmes stochastiques de voyageur de commerce.

Dans la littérature, il existe deux types de problème stochastique de voyageur de commerce (PSVC); dans le premier type, on a un problème de voyageur de commerce (PVC) pour lequel le nombre de points à visiter dans chaque cas particulier est une variable aléatoire. On a donc un voyageur de

commerce qui dessert n clients, mais pas tous à chaque période, et on doit déterminer a priori la meilleure tournée à effectuer contenant les n clients et déterminer une stratégie qui nous permettra d'adapter la solution a priori pour chaque cas particulier, où seulement k clients sont présents ($k \leq n$). Dans le deuxième type, ce sont les coûts de parcours entre les villes qui sont stochastiques; on ne connaît que leur fonction de distribution. Nous verrons plus en détails ces problèmes à la section 2.

1.3) Problèmes stochastiques de tournées de véhicules.

À partir du problème standard de tournée de véhicules (PTV) (c'est-à-dire le problème de tournée avec plusieurs véhicules de même capacité, un seul dépôt, des demandes connues et une fonction objective qui minimise la distance totale), on peut créer plusieurs types de problèmes stochastiques. Dans la littérature, on en retrouve trois: le PTV avec clients stochastiques, le PTV avec demandes stochastiques et le PTV avec demandes stochastiques et plusieurs dépôts. Le premier cas est l'extension du PVC avec clients stochastiques, défini à la section 1.2, de la même façon que le PTV est l'extension du PVC dans le cas déterministe. Le deuxième cas est un PTV pour lequel on doit déterminer a priori les tournées sans connaître les demandes exactes et trouver une stratégie qui nous permette d'adapter la solution a priori pour les cas particuliers. La stratégie en question indiquera, ici, la marche à suivre, lorsque la capacité d'un véhicule sera atteinte avant que celui-ci ait terminé sa tournée. Le dernier cas est identique au deuxième, avec la seule différence qu'il y a plusieurs dépôts plutôt qu'un seul. Nous reviendrons sur ces problèmes à la section 3.

1.4) D'autres problèmes stochastiques de tournée.

Dans les sections 1.2 et 1.3, nous avons décrit des problèmes stochastiques de tournée qu'on retrouvait dans la littérature, mais il existe plusieurs autres types de problèmes qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été traités; il s'agit entre autres des problèmes de tournées de véhicules avec coûts stochastiques et des problèmes de tournées de véhicules avec composantes stochastiques multiples (par exemple: clients et demandes stochastiques ou encore coûts et clients stochastiques, etc...). Les problèmes de voyageur de commerce peuvent aussi être envisagés avec composantes stochastiques multiples. Il est à noter, ici, qu'on ne

considère jamais de demandes stochastiques dans les problèmes de voyageurs de commerce, car dans ces types de problème, il est toujours pris pour acquis qu'il n'y a pas de contraintes de capacité. En effet, dans le cas contraire, nous avons un problème de tournées de véhicules. Donc, le seul cas possible de composantes stochastiques multiples pour le problème de voyageur de commerce est celui où les clients et les coûts sont stochastiques. À la section 4, nous verrons plus en détail ces différents problèmes.

1.5) Problèmes connexes.

Il existe plusieurs autres types de problèmes stochastiques d'optimisation combinatoire apparentée aux problèmes stochastiques de tournées de véhicules, mais dont nous ne traiterons pas spécifiquement dans cet ouvrage. Parmi les plus importants, mentionnons le problème stochastique d'arbre de recouvrement minimale(Bertsimas [1988]), où le nombre de noeuds est une variable aléatoire, le problème mixte de localisation de dépôt et de voyageur de commerce avec clients stochastiques (Bertsimas [1988] , Simchi-Levi et Berman [1988] , Berman et Simchi-Levi [1986] , [1988]); et le problème mixte de localisation de dépôt et de tournée de véhicules avec demandes stochastiques(Laporte et al. [1988]).

1.6) Un aperçu du travail.

Dans cette section, on donne brièvement un avant-goût de la teneur des sections suivantes, c'est-à-dire que nous allons voir quels genres de questions y seront abordées. D'un point de vue théorique, le premier objectif, lorsqu'on aborde un problème d'optimisation combinatoire, c'est de comprendre sa complexité; on verra que l'introduction d'éléments probabilistes dans un problème peut changer énormément la complexité de celui-ci. On examine aussi la structure combinatoire des problèmes: on peut développer des bornes pour les solutions optimales, étudier la relation entre les solutions optimales des versions probabilistes et déterministes d'un même problème, déterminer des propriétés diverses tant pour les solutions optimales que pour les fonctions utilisées dans les modèles. Nous pouvons ensuite faire une analyse probabiliste du modèle euclidien aléatoire, où les points sont distribués de façon aléatoire sur une surface unitaire, et caractériser le comportement assymptotique du modèle. Lorsque ces étapes

préliminaires sont accomplies, on cherche à construire des algorithmes exacts ou approximatifs en utilisant les connaissances qu'on y a acquises. Ces algorithmes devraient évidemment bien se comporter, même dans les pires cas. Finalement, lorsque cela est possible, on applique les algorithmes que l'on a développés à des problèmes concrets ou bien on fait des études de performance avec des problèmes-tests.

La suite du rapport est divisée en quatre sections additionnelles. Les sections 2 à 4 reprennent en détails les points soulevés précédemment pour les PSVC, les PSTV et les nouveaux problèmes de tournées. La section 5 présente une synthèse de la recherche sur les problèmes stochastiques de tournées, ce qui a été fait et ce qui reste encore à faire.

2) PROBLÈMES STOCHASTIQUES DE VOYAGEUR DE COMMERCE (PSVC)

Comme nous l'avons vu précédemment, le problème de voyageur de commerce déterministe a été l'objet d'une grande quantité de publications (Lawler et al. [1985]); mais la contrepartie stochastique du même problème a été passablement moins souvent abordée. On retrouve dans la littérature, les articles de Derman et Klein [1966] , Kao [1978] , Leipälä [1978] , Jaillet [1985] , [1987] , Jezequel [1986] , Jaillet et Odoni [1988] et Bertsimas [1988]. Ces auteurs traitent de plusieurs aspects du problème stochastique de voyageurs de commerce, autant du point de vue théorique que pratique, et nous allons maintenant examiner les différents modèles ainsi que les résultats qu'ils ont obtenus. Mais avant d'aller plus loin, nous allons rappeler la définition du problème de voyageur de commerce: un voyageur de commerce doit visiter n villes, une et une seule fois, revenir à son point de départ à la fin de sa tournée et ce en minimisant le coût. Dans ce problème, deux éléments peuvent être stochastiques: le nombre de villes et les coûts. Il existe, ainsi, deux types principaux de PSVC.

2.1) PSVC avec coûts stochastiques.

Ce qu'on entend par coût, dans un PSVC, c'est en réalité la distance ou le temps; on cherche à minimiser le total de l'un ou l'autre, lorsqu'on connaît seulement leurs fonctions de distribution. À notre connaissance, il n'y a que très peu d'articles traitant du PSVC avec coûts stochastiques. Dans son article, Leipälä [1978] traite du cas où les distances sont stochastiques, alors que Kao [1978] s'attaque plutôt aux problèmes avec temps stochastiques.

Leipälä cherche à estimer la longueur moyenne de la tournée optimale, mais surtout à déterminer les cas où l'algorithme du plus proche voisin est efficace, et ce, en calculant l'espérance d'une borne supérieure. Il envisage les trois cas suivants: distances assymétriques ne respectant pas l'inégalité du triangle, distances symétriques ne respectant pas l'inégalité et distances symétriques respectant l'inégalité. La borne supérieure est fournie par l'algorithme du plus proche voisin dans les trois cas. Les bornes inférieures sont développées à partir des distributions de probabilité des distances. Notons que l'auteur fait certaines suppositions relativement restrictives quant à la forme de ces distributions. Les conclusions qu'il apporte sont donc essentiellement liées à

ces suppositions et portent uniquement sur l'efficacité de l'algorithme du plus proche voisin dans ces cas bien précis. Il va sans dire que l'auteur ne cherchait pas à fournir d'algorithme pour solutionner le PSVC avec distances stochastiques.

Kao, comme on l'a déjà mentionné, s'est attaqué au PSVC où les temps de parcours entre deux villes sont stochastiques. Mais, dans le problème qu'il considère, l'objectif n'est pas de minimiser le temps total de parcours, mais plutôt de maximiser la probabilité d'avoir complété la tournée avant un certain temps donné. L'auteur propose deux algorithmes pour solutionner ce dernier problème. Le premier est un algorithme de programmation dynamique et le second un algorithme d'énumération implicite. Examinons ces deux méthodes.

Le fondement théorique sous-jacent au premier algorithme est très semblable à celui qui est utilisé dans le cas déterministe par plusieurs auteurs (par exemple: Bellman [1962] , Held et Karp [1962]), pour le PVC. Cependant, dans le cas présent, la fonction de retour utilisée dans le programme dynamique étant une fonction de distribution, la formulation proposée par l'auteur s'inscrit dans la même veine que celle de Mitten [1974] où on utilise la théorie des ordres préférentiels. C'est-à-dire qu'il définit un opérateur d'ordonnancement pour choisir, entre les différentes fonctions de distribution, celle qui optimisera le retour (la probabilité d'avoir complété la tournée avant un certain temps). L'algorithme obtenu est exact mais, comme plusieurs méthodes utilisant la programmation dynamique, il est très limité en ce qui a trait à la dimension des problèmes qu'il peut traiter (limitation due à l'espace mémoire); l'auteur mentionne un nombre de villes limité à 20. Pour pallier cet inconvénient, l'auteur propose l'utilisation d'une stratégie de "branch-and-bound" (cette procédure fut introduite en programmation dynamique par Morin et Marsten [1976] pour le cas déterministe): il développe une borne inférieure (pour la probabilité d'avoir terminé avant le temps donné) qui permettra l'élimination de certains états dans le programme dynamique. Il y aura donc plus de calculs à chaque état mais moins d'états, donc un gain parfois substantiel d'espace mémoire.

Le deuxième algorithme proposé par l'auteur en est un d'énumération implicite; il s'agit d'une procédure de recherche dans un arbre qui génère des sommets et utilise ensuite deux conditions d'élimination pour ceux-ci: une borne, comme dans l'algorithme précédent, et un ordonnancement de vecteurs pour

éliminer les sommets qui sont dominés. L'auteur mentionne que cet algorithme est équivalent au premier lorsqu'on y utilise la stratégie de "branch-and-bound" sauf en ce qui a trait à la définition des sommets et à la façon de les programmer sur ordinateur.

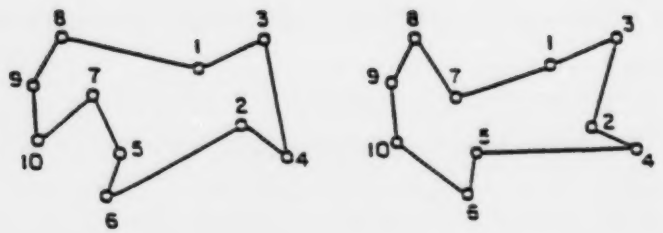
2.2) PSVC avec clients stochastiques.

Le PSVC avec clients stochastiques est l'un des problèmes stochastiques les plus fondamentaux qu'on puisse définir ainsi qu'un des plus approfondis. Il a été introduit pour la première fois par Jaillet [1985]. C'est essentiellement un PVC, pour lequel le nombre de clients à visiter est une variable aléatoire. De façon plus formelle, considérons un problème de tournée défini sur un ensemble de n villes connues; à chaque période, seulement un sous-ensemble S, constitué de k villes choisies parmi les n connues ($k \leq n$), doit être visité. Supposons que la probabilité du sous-ensemble S est $p(S)$. On cherche à déterminer une tournée a priori pour les n points. À chaque période, les k villes présentes seront visitées dans le même ordre qu'elles apparaissent dans la tournée a priori (voir la Figure 1 pour une illustration). Le problème consiste donc à déterminer une tournée a priori qui minimise l'espérance de la longueur. La stratégie, pour employer la terminologie de la section 1.1, pour adapter la solution a priori à chaque période consiste donc à visiter chaque ville dans le même ordre que la solution a priori et de sauter les villes qui ne sont pas présentes.

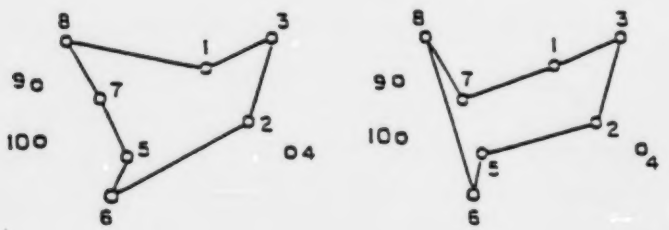
L'espérance de la longueur est calculée à partir de tous les sous-ensembles S de l'ensemble des villes $V = \{1,2,...,n\}$. C'est-à-dire que si la tournée a priori est r, que la probabilité de S est $p(S)$ et que la distance totale pour parcourir les villes de S est $L_r(S)$, alors ce sous-ensemble aura un poids de $p(S)\ L_r(S)$ dans le calcul de l'espérance de la longueur. De plus, si on dénote par L_r la longueur a priori de la tournée qu'on va obtenir en utilisant r comme tournée a priori (L_r est une variable aléatoire), alors le problème se résume à trouver la tournée a priori r_p parcourant les n villes potentielles et minimisant la quantité suivante:

$$\mathbb{E}[L_r] = \sum_{S \subseteq V} p(S)\, L_r(S), \qquad (2.1)$$

où la sommation est effectuée sur tous les sous-ensembles de V.



1.1 Deux tournées a priori pour le même ensemble de points.



1.2 Les deux tournées obtenues lorsque les points 4, 9 et 10 ne nécessitent pas de services.

Figure 1. Exemple illustrant la stratégie.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le PSVC avec clients stochastiques est un des problèmes centraux de l'optimisation combinatoire probabiliste. Son importance est mise en évidence par la multitude d'applications qu'on peut lui associer. Jaillet et Odoni [1988] fournissent quelques exemples. De façon générale, les PSVC avec clients stochastiques se retrouvent en pratique lorsqu'une compagnie fait face, pour une période donnée, au problème de collectes (livraisons) chez un sous-ensemble de son ensemble de clients potentiels et qu'elle ne veut ou ne peut pas re-dessiner la tournée à chaque période. La raison,

pour laquelle on ne re-dessine pas la tournée, peut être que l'opérateur du système n'a pas les ressources nécessaires ou bien encore qu'il préfère opter pour un service régulier et personnalisé en visitant toujours les clients dans le même ordre: le chauffeur connaît mieux sa tournée et les visites aux clients se font plus souvent au même moment de la période (un client sera toujours visité en début de période, alors qu'un autre sera toujours visité en fin de période, etc...). On retrouve dans la littérature quelques exemples: un système de livraisons de repas chauds (Bartholdi et al. [1983]), l'itinéraire d'un chariot élévateur dans un entrepôt et la livraison journalière de la poste.

Considérons maintenant une compagnie de collectes ou de livraisons qui a décidé d'offrir ses services dans une région donnée. Dans un but de planification stratégique, la compagnie a effectué une étude de marché et identifié un nombre n de clients potentiels qui, durant une période de collectes ou de livraisons, ont une certaine probabilité de nécessiter un service. La compagnie désire estimer les ressources nécessaires pour servir ses clients. À cette étape de la planification, la compagnie assigne une probabilité à chaque client (celle-ci peut être égale pour tous les clients ou variable selon les informations recueillies lors de l'étude de marché) et cherche à estimer le temps moyen nécessaire pour servir un sous-ensemble des n clients potentiels, durant une période typique. Il s'agit évidemment d'un PSVC avec clients stochastiques.

Les PSVC avec clients stochastiques peuvent aussi être appliqués dans des contextes où il n'y a pas de tournées ou d'itinéraires à proprement parler; il s'agit des situations où une suite d'entités doit être trouvée et doit demeurer inchangée même lorsque certaines des entités sont absentes. On retrouve un tel cas dans le domaine de la planification d'horaire de machine-outil: on doit agencer n travaux sur une machine-outil avec des coûts de transfert lorsqu'on passe d'un travail à l'autre. À chaque période, seulement un sous-ensemble des n travaux nécessite d'être effectué. De plus, on ne peut ré-agencer les travaux à chaque période, car chaque agencement impose certaines exigences à plus long terme pour l'atelier, telles que des tâches à effectuer avant et/ou après l'exécution des travaux sur la machine. On désire donc garder toujours le même agencement ce qui fait que la stratégie du PSVC avec clients stochastiques est tout à fait appropriée.

2.3) Propriétés fondamentales du PSVC avec clients stochastiques.

Nous allons, à présent, résumer les différents résultats obtenus par Jaillet [1985]; ceux-ci constituent le point de départ de toute étude sur le PSVC avec clients stochastiques.

2.3.1) Calcul de la longueur moyenne d'un tour pour un PSVC avec clients stochastiques.

Supposons que nous connaissons le tour a priori r qui passe par les n points du PSVC avec clients stochastiques. Chaque point i a une probabilité p_i de nécessiter une visite, indépendemment des autres points à visiter pour la même période. Evidemment, L_r, la longueur a priori de la tournée obtenue lorsqu'on utilise r, peut prendre 2^n valeurs différentes (puisqu'il y a 2^n sous-ensembles possibles de n points) et il est donc vain de tenter d'utiliser l'énumération pour calculer $\mathbb{E}[L_r]$. Jaillet [1985] a obtenu l'expression très efficace suivante pour ce calcul:

Résultat 1: Si la distance entre deux points i et j est donnée par d(i,j) et si on suppose, sans perte de généralité, que la tournée a priori est r = (1,2...,n,1), alors

$$\mathbb{E}[L_r] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} d(i,j)\, p_i p_j \prod_{k=i+1}^{j-1} (1-p_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} d(j,i)\, p_i p_j \prod_{k=j+1}^{n} (1-p_k) \prod_{k=1}^{i-1} (1-p_k) \qquad (2.2)$$

L'expression (2.2) est déduite en considérant la probabilité que chaque lien soit présent. Il est à noter qu'il s'agit de l'expression la plus générale possible. En effet, dans la majorité des problèmes, un certain point (le dépôt) devra toujours être présent, pour la tournée r = (1,2,...,n,1) ce serait le point 1. Dans ce cas, la deuxième double sommation de (2.2) disparaît complètement puisque $p_1 = 1$. L'expression (2.2) nécessite des temps de calcul de $O(n^3)$. Jaillet envisage plusieurs autres cas spéciaux: le cas où tous les points ont la même probabilité

$(p_i = p, \forall_i)$ et le cas où plusieurs points doivent nécessairement être présents dans tous les sous-ensembles. Il fournit évidemment des expressions pour $\mathbb{E}[L_r]$, dans chaque cas.

2.3.2) Relation entre le PVC et le PSVC avec clients stochastiques.

L'expression (2.2) nous permet, en plus de pouvoir calculer efficacement $\mathbb{E}[L_r]$, de comprendre certaines propriétés fondamentales du PSVC avec clients stochastiques. En effet, (2.2) fournissant une expression explicite pour la fonction objective du PSVC avec clients stochastiques, Jaillet [1985] a pu étudier le lien entre les solutions de ce problème et celles du PVC. Il a montré que la solution du PVC est, en général, une bien mauvaise solution pour le PSVC. Cependant, sous certaines conditions bien spécifiques, les solutions des deux problèmes peuvent être identiques (par exemple, si tous les points sont disposés sur le pourtour d'un polygone convexe). Mais ceci n'est vrai, dans le cas général, que pour des problèmes de dimensions extrêmement réduites. Jaillet démontre le résultat suivant:

Résultat 2: Si les n points ont des probabilités indépendantes de nécessiter un service et si les distances entre les points sont symétriques alors, les seuls cas où la solution optimale pour le PVC est assurément la solution optimale du PSVC avec clients stochastiques, sont ceux pour lesquels $n \leq 5$ (si les distances ne sont pas symétriques, alors le résultat n'est valide que si $n \leq 3$). Si un dépôt doit obligatoirement être présent dans la solution alors, le résultat est valide pour au plus 4 points, incluant le dépôt.

Ce résultat nous suggère qu'il se peut qu'il soit nécessaire de concevoir de nouvelles procédures pour solutionner le PSVC avec clients stochastiques. Cette suggestion sera encore plus appropriée à la lumière du prochain résultat, démontré par Jaillet.

Résultat 3: Soient r_p la solution optimale du PSVC avec clients stochastiques et L_{PVC} la longueur a priori de la tournée qu'on va obtenir en utilisant la tournée optimale du PVC comme tournée a priori plutôt que r_p. Si un dépôt est nécessairement inclus dans toutes les tournées, alors:

$$\frac{\mathbb{E}\left[L_{PVC}\right] - \mathbb{E}\left[L_{r_p}\right]}{\mathbb{E}\left[L_{r_p}\right]} \leq \frac{n - \mathbb{E}[W]}{\mathbb{E}[W]} , \qquad (2.3)$$

où W est le nombre de points présents à une période quelconque.

La partie de gauche, dans l'inégalité (2.3), représente l'erreur (relative par rapport à $\mathbb{E}\left[L_{r_p}\right]$) qui résulterait de l'utilisation de la solution optimale du PVC en tant que tournée a priori pour résoudre le PSVC avec clients stochastiques, plutôt que de la vraie solution, r_p . La partie de droite fournit une borne supérieure pour cette erreur. Jaillet et Odoni [1988] mentionnent la borne légèrement améliorée suivante:

$$\frac{n - \mathbb{E}[W]}{1 + \mathbb{E}[W]} \qquad (2.4)$$

mais ils ne précisent pas sa provenance. De toute façon, on remarque que lorsque les probabilités p_i prennent de petites valeurs, le nombre moyen de points présents à une période quelconque ($\mathbb{E}[W]$) est petit par rapport au nombre de points potentiels et alors la borne dans (2.3) ou (2.4) peut devenir passablement élevée. C'est-à-dire que la solution optimale du PVC peut être une très mauvaise solution pour le PSVC avec clients stochastiques. Jaillet [1986] fournit des exemples pour lesquels la solution optimale du PVC peut devenir très médiocre pour le PSVC avec clients stochastiques, lorsque p tend vers zéro (pour le cas $p_i = p, \forall_i$) . Cependant, il n'existe pas encore d'exemples pour lesquels la borne de (2.3) ou (2.4) soit atteinte. Mentionnons, finalement, que Jaillet [1985] fournit d'autres expressions du type de (2.3) pour les cas où il y a plusieurs points qu'on doit visiter à chaque période ou encore pour les cas où il n'y a aucun point de ce type.

À l'aide d'un exemple très significatif que Jaillet [1985] a introduit et que Jaillet et Odoni [1988] reprennent, ces auteurs avancent l'hypothèse que la tournée qui solutionne le PSVC avec clients stochastiques est de plus en plus encline à contenir des trajets qui zigzaguent ou qui ont une forme d'étoile lorsque

les probabilités p_i décroissent. Cette hypothèse plutôt intuitive est renforcée par les résultats suivants:

2.3.3) Deux résultats additionels (et contre-intuitifs).

Les résultats suivants soulignent le fait que l'aspect probabiliste de PSVC avec clients stochastiques introduit des caractéristiques qui sont résolument différentes de celles du PVC.

Résultat 4: Pour un PSVC avec clients stochastiques dans le plan euclidien, la tournée optimale peut s'entrecroiser à plusieurs reprises.

Le résultat 4 va à l'encontre de l'une des premières propriétés établies quant à la solution optimale du PVC: c'est-à-dire que la tournée optimale d'un PVC, dans le plan euclidien, ne doit jamais s'entrecroiser. Puisque cette propriété est souvent exploitée pour la construction d'heuristiques (Lawler et al. [1985] ou Bodin et al. [1983]), on doit être très prudent si l'on veut utiliser des versions modifiées de ces algorithmes pour résoudre le PSVC avec clients stochastiques.

Résultat 5: L'extension, au PSVC avec clients stochastiques, de l'approche par programmation dynamique pour solutionner le PVC n'est pas appropriée et ne résout pas le PSVC.

L'approche de programmation dynamique pour résoudre le PVC (due à Held et Karp [1962]) est probablement la plus connue (mais loin d'être la plus efficace) et apparemment si simple qu'on pourrait raisonnablement s'attendre, en principe, qu'elle résolve le PSVC de la même manière. Mais ce n'est pas le cas, et cela parce que le PSVC ne peut pas se décomposer directement en plusieurs étapes. Jaillet et Odoni [1988] mentionnent qu'une observation similaire peut être faite pour d'autres problèmes stochastiques (Andreatta et Romeo [1988]).

2.3.4) Bornes et résultats asymptotiques.

Pour les problèmes de tournées de véhicules ou d'horaires, spécialement pour les situations de planification à long terme, il est souvent très utile de

posséder des expressions simples qui nous indiquent les bornes supérieures et inférieures pour la longueur des tournées. En plus de déterminer ces bornes, les chercheurs ont tenté ces dernières années de comprendre les propriétés asymptotiques ou "à la limite" de certains problèmes de tournées, c'est-à-dire lorsque le nombre de points à visiter augmente. De tels résultats sont très utiles dans nombre de situations. Par exemple lorsqu'il s'agit d'obtenir des approximations pour des problèmes de tournées de grande taille, d'analyser les propriétés de certains algorithmes heuristiques, ou d'explorer la frontière entre de bonnes et de mauvaises heuristiques de façon probabiliste (contrairement à l'étude des pires cas, ici on évalue les performances d'un algorithme en moyenne). Dans cette ligne de pensée, les concepts fondamentaux ont été introduits par Beardwood et al. [1959] et Karp [1977]. Ces idées peuvent être appliquées aux problèmes d'optimisation combinatoire probabilistes et Jaillet [1985] a établi plusieurs bornes et résultats asymptotiques utiles pour le PSVC avec clients stochastiques. Nous allons donner un aperçu du genre de résultats qu'il a obtenus.

Avant d'énoncer le résultat, nous allons résumer la notation utilisée tout au long de cette section. On considère un ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ et on suppose que les distances entre les points sont les distances euclidiennes habituelles; $x = \{x_1, x_2, ...\}$ représente une suite infinie de points de $\mathbb{R}^2$ et $x^{(n)}$ indique les n premiers points de x. Si la position des points est aléatoire, la suite sera représentée par une lettre majuscule $X = \{X_1, X_2, ...\}$. On suppose, de plus, que chaque point de la suite nécessite une visite, avec une probabilité p, indépendemment des autres.

La fonction $\mathbb{E}\left[L_{t_x(n)}\right]$ définit l'espérance de la longueur a priori de la tournée qu'on va obtenir en utilisant $t_x(n)$ comme tournée a priori ($t_x(n)$ est la tournée a priori optimale pour les points de $x^{(n)}$). Lorsque la position des points est aléatoire, $\mathbb{E}\left[L_{t_X(n)}\right]$ est une variable aléatoire et son espérance (par rapport à la position des points) s'écrit $\mathbb{E}_X\mathbb{E}\left[L_{t_X(n)}\right]$.

Résultat 6: Soit x, une suite arbitraire de points de $[0,v]^2$ (le carré de côté v), alors:

$$\mathbb{E}\left[L_{t_X(n)}\right] \leq \begin{cases} \left(\sqrt{2(np-2)} + \frac{13}{4}\right)v & \text{si} \quad np \geq 2,5 \\ \left(\frac{np}{2} + 3\right)v & \text{si} \quad np < 2,5 \end{cases} \tag{2.5}$$

Résultat 7: Soit X, une suite de points indépendemment et uniformément distribués sur $[0,v]^2$, alors:

$$\mathbb{E}_X\mathbb{E}\left[L_{t_X(n)}\right] \leq \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{4}{3}(np-3)} + \frac{11}{2} + \sqrt{2}\right)v & \text{si} \quad np \geq 3,75 \\ \left(\frac{np}{3} + \frac{2}{3} + \sqrt{2}\right)v & \text{si} \quad np < 3,75 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\mathbb{E}_X\mathbb{E}\left[L_{t_X(n)}\right] \geq \frac{5}{8}\left(p\sqrt{n} - p(1-p)^{n-1}\right)v \tag{2.7}$$

Ces deux résultats sont valides pour des valeurs de n finies; pour n très grand, les bornes sont toutes d'ordre $0(\sqrt{n})$. Dans le prochain résultat, nous verrons que la valeur ($\mathbb{E}\left[L_{t_X(n)}\right]$) d'une tournée optimale pour un PSVC avec clients stochastiques, tirés d'une distribution uniforme sur le carré unitaire, converge (lorsque n tend vers l'infini), avec une probabilité de 1, vers c(p).n . Ici c(p) est une constante positive qui ne dépend que de la probabilité p de nécessiter une visite.

Résultat 8: Soit X, une suite infinie de points indépendemment et uniformément distribués sur $[0,1]^2$, alors il existe une constante c(p) telle que:

$$\forall p \in [0,1]: \lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{E}\left[L_{t_X(n)}\right]}{\sqrt{n}} = c(p) \text{ avec probabilité de 1 ,} \tag{2.8}$$

où $c(p) > 0 \quad \forall p \in (0,1]$.

Jaillet a prouvé l'existence d'une constante c(p), mais ne donne pas de valeur numérique précise pour celle-ci. En fait, Jaillet et Odoni [1988] mentionnent que le même phénomène se produit dans le cas d'autres résultats asymptotiques similaires (voir Beardwood et al. [1959] pour le PVC, Papadimitriou [1978] pour le problème de couplage et Gilbert [1965] pour le problème d'arbre de recouvrement). On ne peut que fournir des bornes pour ces constantes.

Résultats 9: À partir des résultats 7 et 8 on tire:

$$\frac{5}{8} p \leq c(p) \leq \sqrt{\frac{4}{3} p} \quad ; \tag{2.9}$$

dans les cas d'une métrique euclidienne, on obtient:

$$\beta\sqrt{p} \leq c(p) \leq \min\{\beta; 0,9204\sqrt{p}\}, \forall p \in [0, 1], \tag{2.10}$$

où β est la constante obtenue pour le PVC par Beardwood et al. [1959] (ces auteurs ont montré que $0,625 \leq \beta \leq 0,9204$).

Finalement, on peut noter que Jaillet a obtenu des résultats asymptotiques dans des cas plus généraux comme, par exemple, ceux impliquant des points nécessairement présents dans toutes les tournées ou ceux comportant une autre métrique plus générale.

2.4) Nouvelles propriétés du PSVC avec clients stochastique et améliorations.

Nous allons maintenant examiner quelques propriétés récemment introduites par Bertsimas [1988] ; cet auteur s'est fortement inspiré des résultats précédents, obtenus par Jaillet [1985] , pour ensuite améliorer ceux-ci ou bien pour développer de nouvelles propriétés. Plus précisément, il a amélioré les

meilleures bornes connues pour le PSVC avec clients stochastiques, et ce, sous plusieurs hypothèses quant aux probabilités p_i ; il a, de plus, étudié quelques propriétés de la fonction $\mathbb{E}[L_t]$ et analysé la relation entre le PSVC et le problème stochastique d'arbre de recouvrement minimal (PSARM) que nous définirons au moment approprié.

2.4.1) Amélioration des bornes pour le PSVC avec clients stochastiques.

Dans cette section nous allons fournir quelques nouvelles bornes plus fortes obtenues par Bertsimas [1988] et ce, dans trois cas différents: $p_i = p, \forall_i$; $p_i \neq p_j$; $p_1 = 1$ et $p_i \neq p_j$.

Le cas $p_i = p, \forall_i$.

Jaillet [1988] a donné la borne suivante:

$$\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right] \geq p\left(1-(1-p)^{n-1}\right)L_{PVC} \qquad (2.11)$$

où t_p est la solution optimale du PSVC avec clients stochastiques, L_{PVC}, la longueur de la solution optimale pour le PVC déterministe (avec les n points présents) et où n doit être un nombre premier. Jaillet a émis la conjecture que ce résultat est aussi valable pour les valeurs de n qui ne sont pas des nombres premiers, mais il n'a pas pu le prouver. Bertsimas a prouvé le résultat suivant:

Résultat 10: Soit t_p, la solution optimale du PSVC avec clients stochastiques, alors pour $n = 2k + 1$ (n est donc impair) on obtient:

$$\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right] \geq p\, L_{t_p}\left(1+(1-p)^{2k-1}-(1-p)^{k}(2-p)\right). \qquad (2.12)$$

Ce résultat est plus fort que la conjecture de Jaillet dans le sens qu'on y utilise L_{t_p} au lieu de L_{PVC} et que pour n assez grand, la borne de (2.12) est généralement supérieure à celle de (2.11); de plus le résultat s'applique pour un plus grand nombre de valeurs de n .

Le cas $p_i \neq p_j$.

Résultat 11: Soit t_p, la solution optimale du PSVC avec clients stochastiques, alors:

$$\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right] \geq Z^*, \tag{2.13}$$

où Z^* est la valeur de la solution optimale du problème de transport suivant:

$$Z^* = \min \sum_{i,j} x_{ij}\ d(i,j)$$

$$\text{s.a.} \sum_i x_{ij} = p_j\left(1 - \prod_{k \neq j}\left(1 - p_k\right)\right), \quad \forall\ j \tag{2.14}$$

$$\sum_j x_{ij} = p_i\left(1 - \prod_{k \neq i}\left(1 - p_k\right)\right), \quad \forall\ i$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Résultat 12: Si l'inégalité du triangle est respectée, alors:

$$\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right] \leq \mathbb{E}\left[L_{t_{PVC}}\right] \leq L_{PVC}\ , \tag{2.15}$$

où t_{PVC} est la solution (la tournée) optimale du PVC.

Pour pouvoir fournir une borne supérieure utile, Bertsimas s'est restreint

aux cas où l'inégalité du triangle est respectée, car, dans le cas contraire, $\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right]$ peut être arbitrairement grand et la valeur de la solution optimale du PVC, petite.

Le cas $p_1 = 1$, $p_i \neq p_j$.

Pour ce cas, Bertsimas améliore la borne de (2.15), dans ce sens qu'elle est plus générale.

Résultat 13: Si l'inégalité du triangle est respectée, alors toutes les tournées t satisfont:

$$\mathbb{E}\left[L_t\right] \leq \sum_{i=2}^{n} p_i \left[d(i,1) + d(1,i)\right].$$

Dans la section suivante, nous analyserons l'effet de la probabilité p (lorsque $p_i = p, \forall_i$) sur le PSVC avec clients stochastiques.

2.4.2) Effet de la variation de la probabilité p.

Lorsque tous les points ont la même probabilité de nécessiter une visite, il est possible d'obtenir une expression particulière pour remplacer celle du résultat 1 (voir (2.2)). En bref, on obtient une expression de la forme suivante:

$$\mathbb{E}\left[L_t\right] = p^2\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} d(i,j)(1-p)^{j-i-1} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} d(j,i)(1-p)^{n-j+i-1}\right] = p^2 g(p,t) \quad (2.16)$$

où g(p,t) est une fonction bi-variée qui dépend de la probabilité p et de la journée t (car les d(i,j) sont redéfinis après avoir re-numéroté les villes selon leur ordre de visite dans la tournée choisie t (voir résultat 1)). Bertsimas [1988] définit alors la fonction suivante:

$$F(p) = \frac{\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right]}{p^2} = \min_t \; g(p,t) \; . \quad (2.17)$$

F(p) est évidemment une fonction de la probabilité p. Pour des valeurs différentes de p, la tournée a priori optimale t_p est bien entendu différente. Nous allons examiner quelques propriétés de la fonction F(p) en commençant par un résultat démontré par Bertsimas.

Résultat 14: Si les coûts sont positifs alors, la fonction F(p) est continue, décroissante, différentiable par morceaux et convexe par morceaux.

Lorsque p s'approche de 1, la solution optimale du PSVC est évidemment la solution optimale du PVC, mais qu'en est-il lorsque p s'approche de 0. Premièrement, lorsque $p = 0$, toutes les tournées sont optimales car $g(0,t) = \sum_{i,j} d(i,j) = D$ est une constante indépendante de la tournée.

Deuxièmement, lorsque p s'approche de 0, l'utilisation du développement en série de Maclaurin nous donne:

$$g(p,t) = g(0,t) + p\ g'(0,t) + \frac{p^2}{2!} g''(0,t) + 0(p^3) \quad \text{, c'est-à-dire} \tag{2.18}$$

$$g(p,t) = D - p\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} d(i,j)(j-i-1) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} d(j,i)(n-j+i-1)\right] +$$

$$\frac{p^2}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} d(i,j)(j-i-1)(j-i-2) + \right. \tag{2.19}$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} d(j,i)(n-j+i-1)(n-j+i-2)\right] + 0(p^3) .$$

Si la matrice de coût est assymétrique, alors la solution optimale du PSVC, lorsque p s'approche de 0, est la tournée qui maximise le coefficient de p dans (2.19). Mais si la matrice de coût est symétrique, la solution optimale est la tournée qui minimise le coefficient de p^2 car, dans ce cas, le coefficient de p est une constante égale à (n-2) D/2.

En combinant le résultat 14 et les observations précédentes, on peut donner l'allure générale de la fonction F(p) (voir la Figure 2).

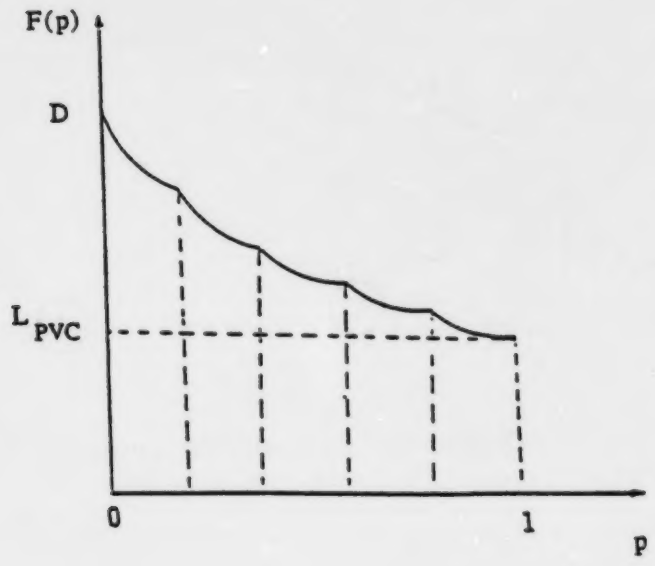


Figure 2: **Le PSVC en tant que fonction de la probabilité p .**

2.4.3) Relation entre le PSVC avec clients stochastiques et le problème stochastique d'arbre de recouvrement minimal (PSARM).

L'arbre de recouvrement minimal joue un rôle important dans l'une des meilleures heuristiques (quant au rapport pour le pire cas) (Christofides [1976]) pour le PVC avec inégalité du triangle. Nous allons examiner la relation entre leur contrepartie probabiliste: le PSVC avec clients stochastiques et le PSARM. Mais avant, nous allons définir ce dernier. Soient un réseau $G = (V,E)$ (avec des liens quantifiés) et des probabilités p_i pour chaque noeud i , on veut alors construire un arbre de recouvrement a priori de longueur espérée minimale, c'est-à-dire qu'il devra recouvrir tous les noeuds de V et minimiser la longueur, mais en tenant compte du fait que tous les noeuds ne sont pas toujours présents à toutes les fois. Ce que l'on sous-entend ici, c'est que pour chaque événement particulier du problème, on calcule la longueur après avoir supprimé les noeuds qui ne sont pas présents (ainsi que les liens qui leur sont adjacents) et qui ne déconnectent pas l'arbre. Pour clarifier la définition du PSARM, nous considérerons l'exemple de la Figure 3. Si l'arbre a priori est T et que, pour un certain événement particulier, les noeuds 2,7 et 9 ne sont pas présents, alors l'arbre sera T_1.

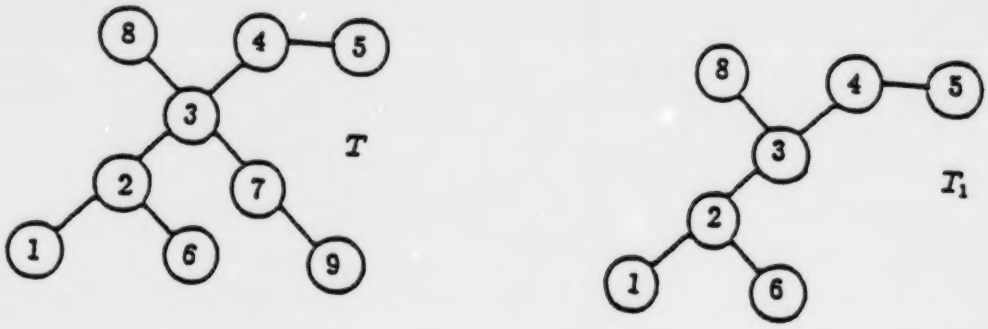


Figure 3: La stratégie pour le PSARM.

Dans le cas déterministe, on peut construire des heuristiques efficaces (Kim [1975], Christofides [1976]) pour le PVC en résolvant le PARM et en utilisant la solution obtenue, comme point de départ de l'heuristique. Mais dans le cas probabiliste on ne peut utiliser la solution du PSARM dans une heuristique efficace, car Bertsimas [1988] a montré que ce problème est NP-difficile. Même en utilisant la solution du PARM, Bertsimas n'arrive pas à construire une heuristique satisfaisante, sauf dans un cas très restrictif.

2.4.4) Un cas spécial.

Dans le cas déterministe, Lawler et al. [1985] ont défini un cas spécial du PVC: le PVC constant, où toutes les tournées ont la même longueur. Dans ce problème, les distances sont de la forme $d(i,j) = u_i + v_j$. Bertsimas [1988] montre, dans le cas probabiliste, un résultat analogue: si les distances sont telles que définies précédemment alors, toutes les tournées ont la même longueur espérée.

2.4.5) Analyse assymptotique et probabiliste du PSVC avec clients stochastiques.

Nous avons déjà remarqué que le PSVC avec clients stochastiques nous fournit une stratégie efficace pour adapter les tournées de voyageur de commerce, lorsque les événements particuliers sont modifiés stochastiquement et que certains clients sont absents. Cette stratégie est notée par la lettre Σ et son espérance par $\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right]$ tel que défini précédemment.

Une autre stratégie a été introduite à la section 1.1: la ré-optimisation, c'est-à-dire qu'à chaque période, on solutionne de façon optimale l'événement particulier S. On dénote cette stratégie par le symbole Σ_{PVC} et la longueur de la tournée optimale pour les clients de S, par $L_{PVC}(S)$. On peut alors définir l'espérance de la stratégie de ré-optimisation comme suit:

$$\mathbb{E}\left[\Sigma_{PVC}\right] = \sum_{S \subseteq V} p(S) L_{PVC}(S) \quad , \tag{2.20}$$

où V est l'ensemble des clients potentiels et p(S), la probabilité que les clients de S soient les seuls présents.

Aux sections 1.1 et 2.2, nous avons discuté de quelques raisons probables pour lesquelles il peut être préférable d'utiliser la stratégie Σ du PSVC plutôt que la stratégie de ré-optimisation Σ_{PVC}. Dans cette section, nous allons examiner de quelles façons les deux stratégies se comportent du point de vue de leur espérance.

Lorsqu'on se place dans la perspective de l'étude du rapport des espérances pour le pire cas, Bertsimas [1988] mentionne qu'on peut construire des exemples avec $(\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right]/\mathbb{E}\left[\Sigma_{PVC}\right]) \to \infty$. Cependant, ce même auteur prouve que dans le cas euclidien ce rapport est O(log n). De plus, il émet la conjecture que la stratégie Σ du PSVC ne diffère de la stratégie de ré-optimisation que par un facteur constant.

D'un point de vue probabiliste, Bertsimas prouve que lorsque les points sont distribués de façon aléatoire dans le carré unitaire, les deux stratégies ont presque assurément la même espérance, c'est-à-dire qu'elles sont assymptotiquement équivalentes. Enoncé de façon plus formelle, Bertsimas a montré que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{E}\left[L_{t_{X^{(n)}}}\right]}{\mathbb{E}\left[\Sigma_{PVC}\left(X^{(n)}\right)\right]} = 1 , \tag{2.21}$$

où $X^{(n)}$ et $\mathbb{E}\left[L_{t_{X^{(n)}}}\right]$ sont définis comme à la section 2.3.4, et où $\mathbb{E}\left[\sum_{PVC}\left(X^{(n)}\right)\right]$ a le même sens que dans (2.20) mais en précisant que l'ensemble de points est $X^{(n)}$.

Comme conclusion à la discussion précédente, on peut observer que la stratégie Σ du PSVC avec clients stochastiques est très naturelle et produit des tournées qui sont proches de la solution optimale lorsque l'inégalité du triangle est respectée.

2.5) Approche et résultats algorithmiques.

Dans les sections précédentes, plusieurs résultats nous suggèrent fortement que le PSVC avec clients stochastiques est suffisamment différent de sa contrepartie déterministe pour justifier, dès le départ, une recherche d'approches spécialement conçues pour résoudre le PSVC. On a pu aussi remarquer qu'il y a peu d'espoir de développer des méthodes exactes d'optimisation pour le PSVC, qui peuvent résoudre plus que des problèmes de modeste dimension et ce, parce que le PSVC est au moins aussi difficile que le PVC. Il est cependant possible (Jaillet [1985]) de formuler le PSVC avec clients stochastiques comme un problème d'optimisation en nombres entiers avec des variables 0-1 (comme pour le PVC) et un ensemble de contraintes linéaires identiques à celles utilisées dans la formulation standard du PVC (voir Bodin et al. [1983]). Malheureusement, la fonction objective est non-linéaire: c'est un polynome de degré n, le nombre de clients potentiels. Ceci rend le problème impossible à solutionner de façon exacte pour un problème contenant un nombre significatif de clients. Le problème peut aussi être transformé en un programme linéaire avec variables mixtes aussi bien qu'en un programme linéaire en nombres entiers (Jaillet [1985]), mais ceci entraîne une grande augmentation du nombre de variables et de contraintes. Jaillet et Odoni [1988] mentionnent que la procédure exacte la plus prometteuse pour le PSVC semble être une approche de "branch-and-bound" décrite par Jaillet [1985] , mais pour laquelle aucun résultat pratique n'est disponible et qui plus est, semble restreinte à certains cas particuliers (par exemple, les cas où p_i est grand).

Conséquemment, on doit se tourner vers l'utilisation d'heuristiques, pour résoudre des cas réels du PSVC. Bertsimas [1988] mentionne cependant qu'on ne doit pas espérer, dans le cas d'une matrice de coût générale, trouver de procédure qui fonctionne en temps polynomiaux et nous donne un rapport, dans le pire cas, constant, puisque le problème correspondant pour le PVC est NP-difficile. Même lorsque l'inégalité du triangle est respectée, il n'y a pas encore de preuve qu'un tel algorithme puisse exister.

Lorsqu'on construit un algorithme approximatif, on doit porter une attention spéciale aux complications soulevées par la nature probabiliste du problème. Même les heuristiques standards les plus simples doivent être modifiées, pour prendre en considération cette difficulté accrue. Jaillet [1985] et Bertsimas [1988] proposent des modifications à plusieurs heuristiques bien connues pour le PVC dans le but de les adapter au PSVC. Parmi celles-ci on retrouve des variations d'heuristiques de construction de tournées (tels que l'algorithme des économies de Clarke et Wright, les approches de partionnement (Karp [1977]) et les algorithmes d'insertion), ainsi que d'heuristiques d'amélioration de tournées (tels que les échanges 2-opt et 3-opt (Lin et Kernighan [1973])). Les modifications présentent un degré de difficulté et nécessitent un effort de calcul variables selon les algorithmes. Le lecteur est référé à Lawler et al. [1985] pour une description de ces heuristiques dans le cas déterministe et à Jaillet [1985] et Bertsimas [1988] dans le cas probabiliste.

À notre connaissance, il n'y a que Jezequel [1986] et Bertsimas [1988] qui ont effectué des tests pratiques pour étudier le comportement des algorithmes conçus pour résoudre le PSVC avec clients stochastiques. Jaillet et Odoni [1988] mentionnent que Jezequel a obtenu, avec consistance, de bons résultats avec une adaptation de l'heuristique des économies de Clarke et Wright, comparativement aux autres heuristiques mentionnées plus haut. Pour tous les problèmes qu'il a étudiés, $p_i = p, \forall_i$. Le travail de Jezequel a permis aussi d'illustrer comment la valeur de la probabilité p peut changer catégoriquement la configuraiton de la tournée obtenue. Ainsi, il a pu constater l'effet de zigzag lorsque la valeur de la probabilité p est peu élevée, c'est-à-dire que dans ce cas on obtient des tournées qui ont des trajets qui se recoupent à plusieurs reprises.

Jezequel a obtenu un autre résultat très intéressant: les changements de valeur pour la probabilité p sont utiles pour identifier plusieurs tournées de configuration significativement différentes, pour un ensemble donné de clients. Dans plusieurs cas, il a observé qu'une tournée, optimale pour une certaine valeur de probabilité p, était aussi très valable (et parfois optimale) pour une autre valeur p'. Ceci nous suggère qu'en variant la valeur de p , on obtient une autre "direction" dans laquelle on peut chercher d'autres tournées pour améliorer la solution. Ceci est particulièrement utile pour les algorithmes d'amélioration itérative (recherche locale). En effet, en variant la valeur de p on peut obtenir une nouvelle tournée possiblement très valable et ainsi s'échapper d'un minimum local. On remarque, ici, une certaine analogie avec l'approche de recuit simulé.

Bertsimas a utilisé deux types différents d'heuristiques: l'heuristique de Bartholdi et Platzman [1982] et l'approche d'amélioration itérative. Pour le premier type, l'heuristique est appliquée comme dans le cas déterministe, c'est-à-dire qu'on ne tient aucunement compte de la nature probabiliste du PSVC. Pour le deuxième type, l'auteur utilise plusieurs heuristiques: les améliorations de type 2-opt et 3-opt introduites par Lin [1965] , une heuristique basée sur l'amélioration 2-opt mais adaptée pour le cas probabiliste et une heuristique basée sur le déplacement d'un point dans la tournée. Lorsque le nombre de points (ou de clients) n est très grand (n = 5 000), Bertsimas utilise l'heuristique de Bartholdi et Platzman, et lorsque n est de grandeur modérée (n = 100 ou 200), il utilise l'approche d'amélioration itérative. L'auteur mentionne que la meilleure approche générale semble être l'utilisation de l'heuristique de Bartholdi et Platzman pour trouver une solution initiale, suivie par une amélioration 3-opt si la probabilité p est assez élevée, et ensuite par une heuristique basée sur le déplacement d'un point. Le seuil à partir duquel l'utilisation de l'amélioration 3-opt est inutile semble plutôt incertain et dépend probablement du problème spécifique étudié. On constate, dans l'ouvrage de Bertsimas que selon la valeur de la probabilité p , les diférentes heuristiques sont plus ou moins équivalentes, aucune ne domine les autres de façon continue.

On peut noter en terminant que Jezequel et Bertsimas n'indiquent pas la qualité de leurs solution, il ne font que comparer différentes méthodes entre elles pour déterminer lesquelles semblent les meilleures.

3) PROBLÈMES STOCHASTIQUES DE TOURNÉES DE VÉHICULES (PSTV)

Comme pour le problème du voyageur de commerce, le problème de tournée de véhicules a été passablement étudié (Golden et Assad [1988] et Bodin et al. [1983]), mais sa contrepartie stochastique, elle, l'est beaucoup moins. On retrouve plus d'articles traitant du problème stochastique de tournées de véhicules (PSTV) comparativement au problème stochastique de voyageur de commerce. Pour ne citer que les plus importants, mentionnons: Stewart et Golden [1983], Dror et al. [1988] , Jaillet et Odoni [1988] et Bertsimas [1988]. Des références pour plusieurs autres articles sont fournies dans la bibliographie. Les différents auteurs abordent plusieurs aspects du problème, tant théoriques que pratiques, et nous allons examiner les modèles qu'ils présentent ainsi que les résultats qu'ils obtiennent. Avant de pousser plus loin, nous allons rappeler la définition du problème de tournées de véhicules classiques (PTV). Soient un ensemble V de n villes ou clients, un dépôt et une matrice des coûts $C=(c_{ij})$ définie sur V^2. De plus, chaque client possède un poids ε_i et une flotte de véhicules de même capacité Q est stationnée au dépôt. Le PTV consiste à déterminer des tournées de véhicules de telle sorte que: (i) toutes les tournées commencent et se terminent au dépôt; (ii) chaque ville n'est servie que par un véhicule; (iii) le poids total de chaque tournée n'excède pas Q ; (iv) le coût total de toutes les tournées est minimisé. Dans ce problème, plusieurs éléments peuvent être stochastiques: le nombre de villes, les coûts et les poids. Dans la littérature, trois types principaux de PSTV sont étudiés; nous allons maintenant les aborder.

3.1) PSTV avec plusieurs dépôts et demandes stochastiques.

Ce type de problème, comme son nom l'indique, fait intervenir plusieurs dépôts. De plus, il est possible que les véhicules aient des capacités différentes. Le seul article qui traite de ce problème est celui de Tillman [1969] ; en fait, celui-ci est le premier auteur à avoir abordé le PSTV. La plus grande difficulté dans ce problème est de déterminer de quelle façon on doit associer des véhicules de capacité différente aux tournées, de manière à respecter les capacités le plus possible (en moyenne) et à minimiser les distances. De plus, dans le problème étudié par Tillman, il y a des coûts associés au fait d'utiliser un trop gros ou un

trop petit véhicule pour une tournée donnée (dans le cas de livraison, par exemple, il ne faut pas manquer de marchandise, ni en transporter trop inutilement). Cet auteur utilise une heuristique basée sur l'algorithme des économies de Clarke et Wright. L'heuristique fonctionne pour les cas de collectes ou de livraisons. L'auteur a modifié le calcul des économies pour tenir compte des multiples dépôts. Comme dans tout algorithme de type Clarke et Wright, on construit une tournée en insérant des villes successivement, en commençant par celle qui présente la plus grande économie. Les économies sont évidemment des économies de distance. Cependant, pour tenir compte des capacités des véhicules, l'algorithme n'insère une ville dans une tournée que si la demande totale de celle-ci n'exède pas la capacité du véhicule. Mais les demandes étant stochastiques, on ne peut connaître avec certitude la demande totale d'une tournée. Tillman introduit alors la notion de charge d'une tournée pour remplacer, dans la condition, la demande d'une tournée. La charge d'une tournée est la valeur qui minimise une fonction de coût espéré dépendant des coûts encourus lorsque le véhicule est trop gros ou trop petit. La charge représente évidemment une demande et elle est aussi utilisée pour déterminer quel véhicule sera associé à quelle tournée. Il n'est pas fait mention, dans l'article, de la qualité des résultats obtenus.

3.2) PSTV avec clients stochastiques.

Pour ce problème, on considère un PTV mais où le nombre de clients est stochastique; en fait chaque client a une probabilité p_i d'avoir une demande de 1 unité (et une probabilité $(1 - p_i)$ d'avoir une demande nulle) à une période donnée. Dans la littérature, on retrouve deux ouvrages importants traitant du PSTV avec clients stochastiques: celui de Jaillet et Odoni [1988] et celui de Bertsimas [1988]. Il faut mentionner que ces auteurs traitent seulement de problèmes où il n'y a qu'un seul véhicule.

L'approche utilisée par les auteurs est la suivante: ils construisent une tournée a priori de longueur espérée minimale, couvrant tous les points ou clients du problème. Mais le véhicule qui effectue la tournée peut ne pas être suffisamment grand, puisque le nombre de clients nécessitant un service est

stochastique et dans ce cas, il devra retourner au dépôt pour décharger la marchandise collectée ou faire le plein de produits à livrer (selon le problème étudié). La longueur espérée doit donc tenir compte de toutes les distances supplémentaires encourues, lorsque le véhicule doit faire ce trajet pour rétablir sa capacité.

On peut se demander si l'approche préconisée par ces auteurs n'est pas similaire à une des approches standards utilisées pour le PTV, c'est-à-dire celle de "route first, cluster second" (voir Bodin et al. [1983]). Avec cette interprétation, le retour du véhicule au dépôt définit plusieurs tournées, de telle sorte que nous pourrions avoir une solution à plusieurs véhicules pour le problème global. Cependant, du fait que le nombre de clients nécessitant un service est stochastique, on doit nécessairement avoir un critère probabiliste pour séparer la grande tournée a priori en plusieurs petites tournées a priori. Les auteurs n'utilisant pas ce type de critère, on ne peut qu'envisager l'interprétation à un seul véhicule.

Les auteurs examinent le PSTV en utilisant deux stratégies différentes pour répondre aux demandes d'une période donnée et traiter les cas où le véhicule doit retourner au dépôt prématurément. En fait, ces stratégies sont utilisées pour adapter la solution a priori aux événements d'une période donnée. La différence entre les deux stratégies (A et B) tient essentiellement au moment où l'information sur les demandes devient disponible. Avec la stratégie A, le véhicule visite tous les points du problème dans le même ordre qu'ils sont visités dans la tournée a priori, mais ne sert que les clients qui nécessitent un service à cette période. En pratique, la stratégie A modélise les situations pour lesquelles il n'y a pas d'informations a priori disponibles sur les demandes des clients. La demande (s'il y en a), pour chaque client, n'est connue que lorsque le véhicule visite celui-ci. Avec cette stratégie, le véhicule ne retourne au dépôt que lorsqu'il a atteint sa capacité; il peut donc visiter inutilement plusieurs clients sans demande.

En suivant la stratégie B, le véhicule visite encore les points dans le même ordre que pour la tournée a priori mais, dans ce cas-ci, seulement ceux qui nécessitent réellement un service. Ce modèle correpsond aux situations pour lesquelles l'information sur les demandes est connue, à chaque période, avant que le véhicule ne quitte le dépôt. On peut donc économiser en ne visitant pas les

clients qui n'ont pas besoin de service. Avec cette stratégie, le véhicule ne visite que le nombre de clients nécessaire pour atteindre sa capacité, puis retourne au dépôt.

Les raisons pour ne pas ré-optimiser à chaque période sont exactement les mêmes que celles que nous avons mentionnées à la section 2.2 pour le PSVC avec clients stochastiques.

3.3) Propriétés du PSTV avec clients stochastiques.

Nous allons maintenant examiner certaines propriétés du PSTV avec clients stochastiques. On pourra remarquer que celles-ci sont du même genre que celles développées pour le PSVC avec clients stochastiques.

3.3.1) Calcul de la longueur moyenne d'une tournée a priori.

Supposons que nous connaissons la tournée a priori r qui visite tous les n points du problème. On note par L_r^i la longueur a priori de la tournée qu'on va obtenir à une période donnée en utilisant r comme tournée a priori et la stratégie i (i = A ou B). L_r^i est une variable aléatoire. On note ensuite par $L_r^i(S)$ la longueur de la tournée qu'on obtient en utilisant la stratégie i, si seulement les clients de S ($S \subseteq V$) ont une demande. La probabilité que seulement les clients de S nécessitent un service est $p(S)$. Le problème de PSTV avec clients stochastiques se résume à trouver la tournée a priori r_p visitant les n villes et minimisant la quantité suivante:

$$\mathbb{E}^i\left[L_r^i\right] = \sum_{S \subseteq V} p(S)\, L_r^i(S)\,, \qquad (3.1)$$

où la sommation est effectuée sur tous les sous-ensembles de V.

On suppose évidemment que la capacité Q du véhicule est strictement inférieure à n. En effet, dans le cas contraire, le véhicule n'atteint jamais sa

capacité et le problème se réduit à un PVC sous la stratégie A et à un PSVC sous la stratégie B. Jaillet et Odoni fournissent donc le résultat suivant:

Résultat 15: Si la distance entre deux points i et j est donnée par d(i,j) et si on suppose, sans perte de généralité, que la tournée a priori est r = (0, 1, 2, ..., n, 0) (0 représente le dépôt), alors pour le cas $p_i = p, \forall_i$, on obtient:

$$\mathbb{E}^A\left[L_r^A\right] = \sum_{i=0}^{n} d(i,i+1) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \, s(i,i+1) \quad , \tag{3.2}$$

$$\mathbb{E}^B\left[L_r^B\right] = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} d(i,j) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \gamma_{ij} \, s(i,j) \quad , \tag{3.3}$$

où $$s(i,i+1) = d(i,0) + d(0,i+1) - d(i,i+1) \quad , \tag{3.4}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\lfloor i/Q \rfloor} \binom{i-1}{kQ-1} p^{kQ} (i-p)^{i-kQ} & \forall i \in \{Q, Q+1, \ldots, n-1\} \\ 0 & \forall i \in \{1, 2, \ldots, Q-1\} \end{cases} \quad , \tag{3.5}$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\lfloor i/Q \rfloor} \binom{i-1}{kQ-1} p^{kQ+1} (i-p)^{j-kQ+1} & \forall i \in \{Q, Q+1, \ldots, n-1\} \\ 0 & \forall i \in \{1, 2, \ldots, Q-1\} \end{cases} \quad , \tag{3.6}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j < i+1 \\ p^2 & \text{si} \quad j = i+1 \\ p^2 (1-p)^{j-i-1} & \text{si} \quad j > i+1 \end{cases} \quad , \tag{3.7}$$

où $\lfloor x \rfloor$ signifie le plus grand entier inférieur à x.

La longueur espérée de la tournée est la somme de deux termes: la longueur de la tournée a priori, dans le cas de la stratégie A ou l'espérance de la longueur a priori L_r^B, dans le cas de la stratégie B, plus la valeur espérée de la distance supplémentaire encourue lorsque le véhicule atteint sa capacité. Les termes s(i,j) représentent la distance supplémentaire lorsque le véhicule atteint sa capacité au point i et retourne au point j. Les termes β_i et γ_{ij} représentent les probabilités respectives que la capacité soit atteinte au point i, dans la stratégie A et que, de plus, le véhicule continue sa tournée à partir du point j, dans la stratégie B. Les temps de calcul pour (3.2) et (3.3) sont respectivement $0(n^2)$ et $0(n^3)$. On peut mentionner, en terminant, que Bertsimas fournit des expressions, pour le cas de probabilités générales p_i, passablement plus complexes.

3.3.2) Constations élémentaires sur le PSTV avec clients stochastiques.

Comme dans le cas du PSVC avec clients stochastiques, les expresion (3.2) et 3.3) ne nous permettent pas seulement de calculer efficacement la longueur espérée des tournées, mais aussi de découvrir plusieurs propriétés intéressantes du PSTV avec clients stochastiques. Jaillet et Odoni mentionnent entre autres les résultats suivants:

Résultat 16: La solution optimale du problème de tournées de véhicules déterministe peut être une très mauvaise solution pour le PSTV correspondant.

Résultat 17: La direction dans laquelle on circule (r = (0, 1, 2, ... , n, 0) versus r' = (0, n, n-1, ... , 2, 1, 0)) peut modifier la longueur espérée d'une tournée, même lorsque les distances entre les clients potentiels sont symétriques.

Résultat 18: Une augmentation de la capacité du véhicule peut, dans certains cas, faire augmenter la longueur espérée d'une tournée.

Le dernier résultat est imputable au fait qu'une augmentation de la capacité modifie assurément l'endroit où le véhicule atteindra sa capacité et cela modifie la

longueur espérée de la distance supplémentaire encourue pour aller au dépôt et poursuivre l'itinéraire. Les équations (3.2) et (3.3) peuvent donc servir à analyser l'influence de la capacité du véhicule.

3.3.3) Diverses bornes quant au PSTV avec clients stochastiques.

Dans la section qui suit nous examinerons les différentes relations qui existent entre les longueurs espérées des tournées lorsqu'on utilise diverses stratégies. Ces relations sont démontrées par Bertsimas. Soient t_A et t_B, les tournées a priori optimales pour les stratégies A et B, puis t_p et t_{PVC}, les tournées optimales pour le PSVC avec clients stochastique et le PVC. Comme on l'a déjà mentionné, lorsque $Q \geq n$ alors, $t_A = t_{PVC}$ et $t_B = t_p$. La stratégie de ré-optimisation Σ_{TV} , comme dans le cas du PSVC, consiste à trouver la tournée de longueur minimale pour le sous-ensemble S de clients, nécessitant une visite à une période donnée. Si R(S) est la longueur de la tournée optimale lorsque seulement les clients de S nécessitent une visite, alors on définit l'espérance de la stratégie Σ_{TV} par:

$$\mathbb{E}\left[\Sigma_{TV}\right] = \sum_{S \subseteq V} p(S)\, R(S)\,. \tag{3.8}$$

Bertsimas a établi des relations entre $\mathbb{E}^B\left[L^B_{t_B}\right]$, $\mathbb{E}^A\left[L^A_{t_A}\right]$, $\mathbb{E}\left[L_{t_p}\right]$ (la longueur espérée optimale du PSVC), L_{PVC} (la longueur optimale du PVC) puis $\mathbb{E}\left[\Sigma_{TV}\right]$ et $\mathbb{E}\left[\Sigma_{PVC}\right]$ (les stratégies de ré-optimisation).

Résultat 19: Si l'inégalité du triangle est respectée, alors

$$\mathbb{E}\left[\Sigma_{TV}\right] \leq \mathbb{E}^B\left[L^B_{t_B}\right] \leq \mathbb{E}^A\left[L^A_{t_A}\right]. \tag{3.9}$$

Résultat 20: Si les distances sont symétriques et l'inégaglité du triangle respectée, alors

$$\mathbb{E}\left[\Sigma_{TV}\right] \geq \max\left(\frac{2}{Q}\sum_{i=1}^{n} d(0,i)p_i \, , \, \mathbb{E}\left[\sum_{PVC}\right]\right) \quad , \qquad (3.10)$$

$$\mathbb{E}^{A}\left[L^{A}_{t_A}\right] \geq \max\left(\frac{2}{Q}\sum_{i=1}^{n} d(0,i)p_i \, , \, L_{PVC}\right) \quad , \qquad (3.11)$$

$$\mathbb{E}^{B}\left[L^{B}_{t_B}\right] \geq \max\left(\frac{2}{Q}\sum_{i=1}^{n} d(0,i)p_i \, , \, \mathbb{E}\left[L_{t_p}\right]\right) \quad . \qquad (3.12)$$

Si les distances sont assymétriques, alors on remplace, dans le résultats 6, $\frac{2}{Q}\sum_{i=1}^{n} d(0,i)p_i$ par $\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n}(d(0,i)+d(i,0))p_i$. De plus, si l'inégalité du triangle n'est pas respectée, il est possible de trouver des bornes inférieures pour $\mathbb{E}^{A}\left[L^{A}_{t_A}\right]$ et $\mathbb{E}^{B}\left[L^{B}_{t_B}\right]$ en résolvant un problème de transport pour chaque borne.

Résultat 21: Si les distances sont symétriques et si $p_i = p \quad \forall_i$, alors

$$\mathbb{E}^{A}\left[L^{A}_{t_A}\right] \leq L_{PVC}\left(1 - \frac{2}{n} - \frac{p}{Q}\right) + \frac{2}{n}\left(2 + \frac{n\,p}{Q}\right)\sum_{i=1}^{n} d(0,i) \quad . \qquad (3.13)$$

Résultat 22: Si les distances sont symétriques et l'inégalité du triangle respectée, alors

$$\mathbb{E}^{B}\left[L^{B}_{t_B}\right] \leq \mathbb{E}^{B}\left[L_{t_p}\right] \leq \mathbb{E}\left[L_{t_p}\right] + 2\sum_{i=1}^{n} d(0,i)p_i \quad , \qquad (3.14)$$

$$\mathbb{E}\left[\Sigma_{TV}\right] \leq \mathbb{E}\left[\Sigma_{PVC}\right]\left(1 - \frac{1}{Q}\right) + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{P}{Q}\right)\sum_{i=1}^{n} d(0,i) \quad , \quad \text{si} \quad p_i = p \;\forall\, i \quad . (3.15)$$

3.3.4) Résultats asymptotiques.

Dans cette section, on examine le comportement assymptotique des stratégies A, B et Σ_{TV} lorsqu'on utilise le modèle euclidien aléatoire. Soit X_1, X_2, ... une suite de points indépendemment et uniformément distribués sur le carré

unitaire. Soient $\mathbb{E}[r]$ la distance moyenne d'un point à l'origine et $X^{(n)}$, l'ensemble des n premiers points de la suite. On définit ensuite les quantités $\mathbb{E}\left[\Sigma^n_{TV}\right]$, $\mathbb{E}^{A}\left[L^{An}_{t_A}\right]$ et $\mathbb{E}^{B}\left[L^{Bn}_{t_B}\right]$ comme antérieurement, mais en remplaçant l'ensemble de points V par $X^{(n)}$. Ces quantités sont des variables aléatoires puisque la position des points n'est pas connue.

Le comportement assymptotique des stratégies dépend très étroitement de la relation qui existe entre la capacité Q et le nombre de clients n. Cette dépendance est aussi critique pour le comportement assymptotique du PTV examiné par Haimovitch et Rinnooy Kan [1985]. Dénotons la capacité du véhicule par Q_n pour indiquer qu'elle dépend de n. Bertsimas a montré le résutlat suivant:

Résultat 23: Si la probabilité qu'un point nécessite un service est p, alors:

1) Si Q est une constante, on obtient avec probabilité de 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\Sigma^n_{TV}\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}^{A}\left[L^{An}_{t_A}\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}^{B}\left[L^{Bn}_{t_B}\right]}{n}=\frac{2\mathbb{E}[r]p}{Q}. \quad (3.16)$$

2) Si $\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{\sqrt{n}}=0$, on obtient avec probabilité de 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n\mathbb{E}\left[\Sigma^n_{TV}\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n\mathbb{E}^{A}\left[L^{An}_{t_A}\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n\mathbb{E}^{B}\left[L^{Bn}_{t_B}\right]}{n}=2\mathbb{E}[r]p. \quad (3.17)$$

3) Si $\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{\sqrt{n}}=\infty$, on obtient avec probabilité de 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\Sigma^n_{TV}\right]}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}^{B}\left[L^{Bn}_{t_B}\right]}{\sqrt{n}}=\beta\sqrt{p}\quad, \quad (3.18)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}^{A}\left[L^{An}_{t_A}\right]}{\sqrt{n}}=\beta\quad, \quad (3.19)$$

où β est la constante définie par Beardwood et al. [1959].

Une conclusion assez surprenante peut être tirée de ce résultat: dans les cas où Q est une constante, ainsi que dans ceux où $\lim_{n \to \infty} \frac{Q_n}{\sqrt{n}} = 0$, les stratégies A et B sont assymptotiquement équivalentes à la stratégie de ré-optimisation. Bertsimas mentionne de plus que le résultat 23 peut être généralisé à l'espace euclidien de dimension d et que la distribution des clients pourrait être partiellement continue.

3.4) Approches algorithmiques.

À notre connaissance, il n'existe qu'un algorithme conçu pour résoudre le PSTV avec clients stochastiques; il s'agit de l'heuristique cyclique de Bertsimas que nous allons énoncer.

1) Soit une tournée initiale $t = t_1 = (0, 1, 2, .., n, 0)$. On considère alors les tournées suivantes: $t_i = (0, i, i+1, \ldots, n, 1, \ldots, i-2, i-1, 0)$ pour $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

2) Calculer $\mathbb{E}^A\left[L^A_{t_i}\right] \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,n$.

3) La tournée t_i^* qui minimise $\mathbb{E}^A\left[L^A_{t_i}\right]$ est la solution proposée au PSTV avec clients stochastiques sous la stratégie A.

Bertsimas a montré le résultat suivant:

Résultat 24: Si on a $p_i = p \;\forall i$, si la tournée initiale fournie à l'heuristique cyclique est t_{PVC} , si la tournée obtenue par cette même heuristique est T_H et si l'inégalité du triangle est respectée, alors

$$\frac{\mathbb{E}^A\left[L^A_{t_H}\right]}{\mathbb{E}^A\left[L^A_{t_A}\right]} \leq 2 - \frac{p}{Q} + 0\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (3.20)$$

Le résultat 24 nous assure que la solution produite dans ces conditions ne diffère de la solution optimale que par un facteur constant, sous la stratégie A et lorsque n est assez grand. Bertsimas mentionne que si on utilise, comme tournée initiale, la tournée obtenue par l'algorithme de Christofides [1976] pour le PVC, alors la borne passe à $\frac{5}{2} - \frac{p}{Q} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$ et dans ce cas les temps de calcul sont $0(n^3)$.

Pour ce qui est de la stratégie B, Bertsimas montre le résultat suivant:

Résultat 25: Si l'inégalité du triangle est respectée, alors

$$\frac{\mathbb{E}^B\left[L^B_{t_p}\right]}{\mathbb{E}^B\left[L^B_{t_B}\right]} \leq Q+1 \quad . \tag{3.21}$$

Cependant, on ne peut trouver t_p dans un temps polynomial, mais on peut remplacer la tournée t_p par la tournée t_{BP} obtenue avec l'heuristique de Bartholdi et Platzman [1982], dans le cas euclidien. Cette heuristique est $0(n \log n)$ et le rapport devient alors:

$$\frac{\mathbb{E}^B\left[L^B_{t_B}\right]}{\mathbb{E}^B\left[L^B_{t_B}\right]} \leq Q+O(\log n). \tag{3.22}$$

De plus, Bartholdi et Platzman ont émis la conjecture que la solution produite par leur heuristique pour le PVC ne diffère de la solution optimale que par un facteur constant. Dans ce cas, la borne de (3.22) deviendrait $Q + 0(1)$ et on obtiendrait une heuristique $0(n \log n)$ qui nous fournit une solution qui ne diffère de la solution optimale que par un facteur constant.

3.5) PSTV avec demandes stochastiques.

Dans ce type de problèmes, tous les clients doivent être servis, mais leurs demandes sont stochastiques. On ne peut donc plus, comme c'était le cas pour le

PTV déterministe, supposer que les véhicules pourront suivre à la lettre un itinéraire planifié à l'avance. En effet, un manque peut survenir dans une tournée, si pour un certain client, le véhicule ne peut satisfaire sa demande. On devra alors avoir un recours ou effectuer une action corrective et ceci engendrera nécessairement des coûts supplémentaires. On a déjà rencontré un tel type de recours lors de l'étude du PSTV avec clients stochastiques (retour au dépôt pour rétablir la capacité du véhicule). Nous verrons cependant que d'autres types d'actions sont possibles.

Avant de procéder à l'étude du PSTV avec demandes stochastiques, on peut noter que ce problème est le plus étudié des PSTV: on retrouve plus d'une dizaine d'articles traitant de ce sujet dans la littérature (voir la bibliographie). Mentionnons aussi qu'une multitude d'applications peuvent être envisagées. En effet, la majorité des problèmes de livraison ou de collectes peuvent être traités de façon réaliste en utilisant un modèle du PSTV avec demandes stochastiques. Les problèmes de livraison d'huile à chauffage et de collecte d'ordures ménagères, pour ne mentionner que ceux-là, en sont des exemples typiques.

Comme dans tous problèmes de tournées de véhicules stochastiques, on doit déterminer une solution a priori et proposer une stratégie pour adapter celle-ci à chaque événement particulier. La solution a priori est celle qui minimise l'espérance d'une fonction de coût qui tient compte des coûts de transport (les distances parcourues) et des coûts des actions correctives. Plusieurs stratégies sont envisageables, mais, avant d'en discuter, on doit introduire la notion de politique de service. Lorsqu'on aborde un PTV deux politiques principales sont rencontrées: (i) la livraison complète, c'est-à-dire que lorsqu'un véhicule arrive chez un client, il doit satisfaire toute la demande (dans ce cas on doit avoir $\xi_i \leq Q$ pour que le problème ait une solution); (ii) la livraison partielle (voir Dror et Trudeau [1988]), c'est-à-dire que la demande d'un client peut être satisfaite par plusieurs véhicules (dans ce cas, on n'exige évidemment plus que chaque client ne soit servi que par un seul véhicule). La première politique est la plus répandue dans la littérature, mais toutes deux sont applicables au PSTV. Cependant, la politique de livraison partielle n'a été employée qu'avec le PSTV avec demandes stochastiques et pas dans les autres PSTV. Mentionnons finalement que la politique de service n'est habituellement pas laissée au choix du chercheur, mais plutôt imposée par le problème étudié.

Comme on l'a déjà mentionné, le moment où l'information sur les demandes devient disponible a une influence majeure sur le genre de stratégie à adopter. De plus, il agit aussi sur le type de politique. Par exemple, si on veut utiliser la politique de livraison complète, la demande d'un client doit être connue avant de commencer le service de celui-ci.

Voyons maintenant trois stratégies employées pour le PSTV avec demandes stochastiques. La première est utilisée dans les cas où toutes les demandes sont connues après que la solution a priori soit déterminée, mais avant que les véhicules quittent le dépôt. Il s'agit alors de planifier des retours au dépôt de manière à minimiser les coûts encourus par ces retours. La deuxième est utilisée dans les cas où la demande d'un client n'est connue que lorsque l'on a terminé de le servir. Dans cette situation, le véhicule retourne au dépôt lorsque sa capacité est atteinte et continue sa tournée après avoir rétabli sa capacité. Pour ce qui est de la troisième stratégie, lorsqu'un véhicule atteint sa capacité il doit faire des voyages aller et retour au dépôt pour chacun des clients qui reste à servir dans sa tournée. Il est entendu que pour chacune des stratégies, l'ordre original de visite de clients, établi par la solution a priori, est respecté même après qu'un véhicule ait atteint sa capacité.

3.5.1) Propriétés du PSTV avec demandes stochastiques.

Nous allons maintenant examiner quelques propriétés du PSTV avec demandes stochastiques qui sont du même genre que celles que nous avons énoncées pour les PSVC et PSTV avec clients stochastiques. Dror et al. [1988] fournissent les trois résultats suivants:

Résultat 26: De façon générale, la solution optimale du PSTV avec demandes stochastiques peut contenir une tournée qui s'entrecroise.

Résultat 27: De façon générale, les clients qui sont situés sur la frontière de l'enveloppe convexe de l'ensemble des clients ne seront pas nécessairement visités dans le même ordre qu'ils apparaissent sur la frontière (contrairement au PVC).

Résultat 28: Le principe d'optimalité (habituellement utilisé dans le contexte de la programmation dynamique) n'est pas vérifié pour le PSTV avec demandes stochastiques.

Le résultat suivant est démontré par Dror et Trudeau [1986]:

Résultat 29: La direction d'une tournée influence sa longueur espérée.

3.5.2) Formulations et modélisation.

Dans cette section, on décrit les principales formulations utilisées pour modéliser le PSTV avec demandes stochastiques. Il va sans dire qu'il existe un modèle pour chaque façon de combiner les politiques, les stratégies et les moments où l'on connaît les demandes. Notre but, ici, n'est pas de les énumérer tous, mais plutôt de donner des exemples types des modèles qui sont utilisés.

Les deux types de modèles les plus couramment utilisés sont basés sur la programmation stochastique (voir Kall [1982] et Wets [1983]); il s'agit des modèles basés sur la programmation stochastique avec contraintes probabilistes et des modèles basés sur la programmation stochastique avec recours.

Programmation stochastique avec contraintes probabilistes.

Stewart et Golden [1983] proposent la formulation suivante, dans laquelle on ne retrouve pas, dans la fonction objective, d'espérance pour la longueur des tournées. Soit x_{ijk} une variable 0-1 égale à 1 si le véhicule k voyage de i à j, et égale à 0 autrement. De plus, m est le nombre de véhicules disponibles, T_m est l'ensemble des solutions réalisables du m-PVC et α est la probabilité maximale permise qu'une tournée ait une demande totale supérieure à la capacité d'un véhicule. Le modèle est alors:

$$(\text{PSCP}) \qquad \text{Min } Z = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d(i,j)\, x_{ijk} \tag{3.23}$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \, x_{ijk} \leq Q \right) \geq 1 - \alpha \qquad \forall k \tag{3.24}$$

$$x = \left(x_{ijk}\right) \in \quad T_m \tag{3.25}$$

Dans ce modèle, il est possible de remplacer la contrainte (3.24) par une contrainte déterministe non-linéaire si on connaît les moyennes et les variances des demandes. De plus, sous certaines hypothèses, il est possible de transformer le modèle (PSCP) en un PTV. Laporte et al. [1988] fournissant un modèle du même type, mais qui ne peut tenir compte de capacités différentes pour les véhicules. Leur modèle se ramène à un PTV avec des hypothèses moins restrictives.

Les deux modèles cités plus haut minimisent la distance parcourue, en contrôlant simultanément la probabilité de dépasser la capacité; cependant, le coût d'un tel événement n'est pas pris en considération. Ces modèles ne sont pas équivalents à ceux qui minimisent la distance espérée en contrôlant simultanément la probabilité de dépassser la capacité. Finalement, on peut mentioner que sous les bonnes hypothèses, les deux modèles suggérés ont le même degré de difficulté qu'un PTV.

Programmation stochastique avec recours.

Stewart et Golden [1983] proposent la formulation suivante:

$$\text{(PSR)} \quad \text{Min } Z = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d(i,j)\, x_{ijk} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \quad \mathbb{E}[\ell_k] \tag{3.26}$$

$$\text{s. a.} \quad x \in T_m \tag{3.27}$$

où λ_k est le coût unitaire supplémentaire encouru lorsque la demande totale de la tournée k dépasse la capacité du véhicule k. $\mathbb{E}[l_k]$ est le nombre moyen d'unités de demande qui sont en surplus dans la tournée k. Les même auteurs ont proposé un modèle semblable, mais où la quantité en surplus n'est pas prise en considération; seulement le fait d'avoir un surplus est important. Dans ces deux

modèles, le coût réel d'un voyage supplémentaire au dépôt n'est pas bien représenté, puisque la localisation du point où il y a eu surplus n'est pas prise en considération.

Dror et Trudeau [1986] proposent une approche de programmation stochastique avec recours en tenant compte, d'une certaine façon, de l'endroit où il y a eu surplus. Ils utilisent en fait la troisième stratégie que nous avons introduite au début de la section 3.5. Ils ne fournissent pas de modèle, mais plutôt une description de leur démarche. Ceci s'explique par le fait qu'il est difficile de représenter l'objectif du PSTV avec demandes stochastiques avec une expression simple et maniable, comme c'était le cas pour les autres problèmes stochastiques que nous avons étudiés.

Dror et al. [1988] proposent deux autres modèles de programmation stochastiques avec recours tenant compte de l'endroit où il y a surplus. Mais ces modèles n'ont, pour l'instant, qu'une valeur descriptive, puisque l'on n'a pas encore fait d'étude à leur sujet.

Nous allons maintenant examiner une méthode entièrement différente de modélisation du PSTV avec demandes stochastiques introduite par Dror et al. [1988].

Processus de décision markovien.

Pour cette modélisation, on considère un PSTV avec un seul véhicule et on suppose que la demande d'un client est connue au moment où le véhicule arrive chez celui-ci. Lorsque le véhicule arrive chez un client, deux choix sont possibles avant de commencer le service: (i) ne pas servir le client et se rendre à un autre point (un autre client ou le dépôt), (ii) servir le client et ensuite se rendre à un autre point. La politique de livraison partielle est acceptée.

Le sytstème est observé chaque fois que le véhicule arrive à un point . Soient $0 = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ les temps (distance totale parcourue par le véhicule) auxquels le véhicule arrive à un point. Ceux-ci sont appelés les temps de transition et correspondent au moment où l'on prend les décisions. L'état du système au temps de transition τ_k est décrit par le vecteur $e = (r, \ell, x_1, \ldots, x_n)$, où r dénote la position du véhicule et ℓ, la capacité résiduelle du véhicule. Si le

quantité de la demande qui reste encore à satisfaire. Si le client i n'a pas encore été visité, alors sa demande est inconnue et $x_i = -1$. À chaque temps de transition, on doit prendre une décision c : $c = (c_1, j)$ signifie que le véhicule se rend au point j, à partir de sa position actuelle, disons i , sans servir le client i et $c = (c_2, j)$ signifie que le véhicule sert le client i avant de se rendre au point j.

Au temps de transition τ_k , le système est dans un état e_k et une décision c_k est prise. Le temps τ_{k+1} de la prochaine transition est déterministe (spécifié par les distances d(i,j)) et le prochain état e_{k+1} est généré à l'aide de la distribution de probabilités des demandes. En réalité, il n'y a qu'une valeur de x_j qui soit aléatoire, toutes les autres composantes de e_{k+1} son déterministes.

Une politique de contrôle est une fonction μ qui associe à chaque état une décision. L'objectif est donc de trouver une politique qui minimise le coût espéré de la suite d'états qui débute à $e_0 = (0, Q, -1, ..., -1)$ et se termine à $e^* = (0, Q, 0, ..., 0)$. Plus précisément, on recherche la politique μ^* qui minimise $\mathbb{E}_\mu\left[\sum_{k=0}^{T} d\left(r_{\tau_k}, r_{\tau_{k+1}}\right)\right]$, où T est le nombre (aléatoire) de transitions.

PVC avec distances dépendant du temps.

On peut mentionner, en terminant, que Bastian et Rinnooy Kan [1988] modèlisent le PSTV avec demandes stochastiques à l'aide d'un PVC avec distance dépendant du temps. Dans ce modèle, la distance entre deux points varie selon le moment où elle est parcourue. Cependant, plusieurs hypothèses assez restrictives sont employées pour construire ce modèle.

3.5.3) Approches algorithmiques.

Comme on a pu le constater, l'état actuel de la recherche sur le PSTV avec demandes stochatiques n'est pas très impressionnant. Seulement quelques modèles mathématiques et peu d'algorithmes ont été proposés, et ceux-ci ne s'appliquent qu'à certaines situations bien particulières. On retrouve quelques algorithmes exacts, mais seulement dans les situations où l'on a pu transformer le PSTV en PTV

exacts, mais seulement dans les situations où l'on a pu transformer le PSTV en PTV ou PVC. C'est le cas notamment lorsque l'on utilise la programmation stochastique avec contraintes probabilistes et que certaines hypothèses sont vérifiées ou encore lorsque le modèle est celui proposé par Bastian et Rinnooy Kan. On peut, dans ces cas, utiliser les algorithmes exacts construits pour résoudre le PTV ou PVC, mais ceux-ci ne sont applicables, de façon réaliste, que pour des problèmes de faible dimension.

Lorsque l'on utilise la programmation stochastique avec recours, le nombre de variables entières nécessaires augmente substantiellement la difficulté du problème et sa taille. À ce jour, on a proposé quelques modèles pour des situations bien précises et on ne retrouve que des algorithmes approximatifs pour résoudre ces modèles. La plupart sont des adaptations très particulières de l'algorithme des économies de Clarke et Wright et ne sont utilisables que dans des situations bien précises. Dror et Trudeau [1986] , ainsi que Stewart et Golden [1983] , proposent de telles adaptations pour les problèmes qu'ils ont étudiés. Les résultats pratiques obtenus par les deux premiers auteurs semblent encourageants.

Stewart et Golden [1986] proposent d'utilier l'algorithme qu'ils avaient développée antérieurement pour le PTV (voir Stewart et Golden [1979]). Il s'agit d'un algorithme qui utilise la technique des multiplicateurs de Lagrange et produit des solutions de bonne qualité pour le PTV. Lorsque l'on applique cet algorithme au modèle de programmation stochastique avec contraintes probabilistes, on déplace celles-ci dans la fonction objective et l'algorithme fonctionne comme dans le cas du PTV.

4) NOUVEAUX PROBLÈMES STOCHASTIQUES DE TOURNÉES DE VÉHICULES

Dans cette section nous allons décrire, de façon informelle, plusieurs problèmes stochastiques de tournées de véhicules qui n'ont pas encore été traités dans la littérature. Il est évident que pour chaque problème, il peut exister plusieurs politiques et stratégies. Notre but, ici, n'est pas de les décrire toutes, mais plutôt de donner une idée générale de chaque problème.

4.1) PVC avec composantes stochastiques multiples.

Dans ce cas-ci, on a un problème de voyageur de commerce avec coûts stochastiques et clients stochastiques. Habituellement, lorsque l'on considère des coûts stochastiques, ceux-ci représentent en réalité les temps pour passer d'un client à un autre. Lorsqu'on fait intervenir le temps, deux objectifs peuvent être envisagés: minimiser le temps total du parcours ou maximiser la probabilité d'avoir complété la tournée après un certain temps donné. Ces objectifs ne fournissent qu'une orientation générale pour les vrais objectifs. En fait, on utilisera plutôt des fonctions combinant des espérances, puisque les temps et les clients sont aléatoires. Ces objectifs peuvent aussi être utilisés lorsque les coûts représentent des distances (en modifiant quelque peu le second objectif). On cherchera donc à déterminer une tournée a priori (couvrant tous les clients) qui satisfera l'objectif choisi. À chaque période, seulement certains clients nécessiteront un service; on visitera ceux-ci seulement, mais dans le même ordre qu'ils se présentaient dans la tournée a priori.

4.2) PTV avec coûts stochastiques.

Pour le problème de tournées de véhicules avec coûts stochastiques, l'objectif semble évident: minimiser l'espérance des coûts. On peut donc traiter ce problème de la même façon qu'un PTV déterministe, mais où on remplace, dans la fonction objective, les coûts c(i,j) par les espérances des coûts $\mathbb{E}[c(i,j)]$. Mais, comme nous l'avons mentionné plus haut, on pourrait plutôt vouloir maximiser la probabilité que les coûts ne dépassent pas une certaine valeur. Dans ce cas la tournée optimale peut être plus coûteuse en moyenne que la tournée qui minimise l'espérance des coûts, mais elle est moins sujette à de fortes augmentations.

4.3) PTV avec composantes stochastiques multiples.

Il existe plusieurs types de problèmes de tournées de véhicules avec composantes stochastiques multiples. En effet, toutes les combinaisons de deux ou trois composantes sont possibles: coûts et clients stochastiques, clients et demandes stochastiques, coûts et demandes stochastiques et combinaisons des trois.

4.3.1) PTV avec clients et demandes stochastiques.

La différence majeure entre ce problème et le PSTV avec demandes stochastiques réside dans le fait que l'on ne visitera pas un client qui n'a pas de demande. En effet, dans le cas présent, on suppose qu'au début de chaque période on connaît les clients qui nécessitent un service, mais non la quantité dont ils ont besoin. Dans le PSTV avec demandes stochastiques, on suppose que tous les clients ont une demande; si ce n'est pas le cas, nous saurons qu'un client ne nécessite pas de service, uniquement lorsque le véhicule le visite. L'objectif est de minimiser l'espérance des coûts. Il va sans dire que l'on devra prévoir un recours pour les cas où un véhicule atteint sa capacité et n'a pas terminé sa tournée. Ceci aura évidemment un effet sur la fonction de coût.

4.3.2) PTV avec coûts et demandes stochastiques.

Ce problème est apparenté au PSTV avec demandes stochastiques, à la différence qu'ici les coûts sont stochastiques. Les objectifs généraux sont les mêmes, mais, dans le cas présent, on devra utiliser des fonctions objectives combinant des espérances, puisque nous avons deux éléments stochastiques. On pourra aussi opter pour un objectif probabiliste (maximiser la probabilité d'un certain événement) comme c'est le cas chaque fois que les coûts sont stochastiques.

4.3.3) PTV avec coûts et clients stochastiques.

Les mêmes remarques que nous avons faites à la section précédente sont valables pour ce problème, en changeant évidemment le PSTV avec demandes stochastiques pour le PSTV avec clients stochastiques.

4.3.4) PTV avec trois composantes stochastiques.

Il s'agit ici du problème de tournées de véhicules où les coûts, les demandes et les clients sont stochastiques. On peut encore faire le même genre de remarques qu'à la section 4.3.2 en notant le rapprochement avec le PTV avec clients et demandes stochastiques.

5) CONCLUSION

Le but de cette section est de donner un aperçu de l'état de la recherche en ce qui a trait aux problèmes stochastiques de tournées de véhicules. Nous résumerons ce qui a été accompli par les chercheurs jusqu'à maintenant et nous examinerons les perspectives de recherche pour l'avenir.

Comme nous l'avons vu aux sections 2 et 3, plusieurs problèmes stochastiques de tournées ont déjà été étudiés. Certains d'entre eux ont fait l'objet de beaucoup plus de recherches et de publications que d'autres, mais pas tous avec le même succès. Les PSTV et PSVC avec clients stochastiques sont probablement les problèmes les plus approfondis. Bertsimas [1988] suggère entre autres, à la fin de son ouvrage, de s'attaquer à la conjecture émise par Bartholdi et Platzman au sujet de la complexité de leur algorithme. La preuve de cette conjecture permettrait simultanément d'obtenir des résultats importants pour les PSTV et PSVC avec clients stochastiques.

Le PSTV avec demandes stochastiques, même s'il a été souvent à l'origine de publications, est loin d'être un problème résolu de façon satisfaisante. En effet, il ne semble pas y avoir encore de modèle bien établi pour ce problème, chaque auteur ou presque proposant le sien. La complexité du problème semble difficile à saisir et à énoncer en termes concis. Plusieurs stratégies et politiques sont proposées, mais elles sont dans l'impossibilité d'englober toute l'étendue du problème. De plus, peu d'approches de solution sont avancées. Il y a donc encore beaucoup à faire pour résoudre ce problème, et ce qui a été accompli n'est qu'un début.

Nous avons aussi examiné deux autres problèmes aux section 2 et 3: le PSVC avec coûts stochastiques et le PSTV avec plusieurs dépôts et demandes stochastiques. Ces problèmes ont fait l'objet de seulement une ou deux publications chacun, et ce, il y a déjà plusieurs années. Il est sûrement possible d'obtenir plus de résultats pour ces problèmes, ne serait-ce qu'en modifiant la situation précise dans laquelle ils ont été étudiés. Par exemple, pour le cas du PSVC avec coûts stochastiques, Leipälä [1978] fournit des bornes pour la fonction objective en utilisant l'algorithme du plus proche voisin; il serait possible d'obtenir d'autres bornes en utilisant un algorithme plus efficace.

Pour ce qui est des nouveaux problèmes décrits à la section 4, tout reste à faire. En effet, il faut préciser les modèles à utiliser ainsi que les stratégies et les politiques. Pour ce faire, on peut employer des formulations avec contraintes probabilistes ou avec recours ou encore celles basées sur la nouvelle méthodologie des processus de décision markoviens. On devra aussi déterminer, pour chaque problème, des propriétés pour les solutions optimales, des bornes et des résutlats asymptotiques. On pourra étudier les similitudes et les différences qui existent entre un problème stochastique et sa contrepartie déterministe. Une analyse du modèle aléatoire euclidien pourra aussi être utile. On devra évidemment proposer des méthodes de solution soient exactes, soient approximatives. On pourra notamment envisager des méthodes de "branch-and-bound", de décomposition ou encore des modifications d'algorithmes conçus pour les problèmes déterministes. Ces méthodes de solution devront être testées et leur comportement, dans les pires cas, et en moyenne, (si possible), examinés.

Finalement, on peut mentionner que les problèmes stochastiques de tournées de véhicules ne forment qu'une partie d'un ensemble plus vaste de problèmes: les problèmes stochastiques d'optimisation combinatoire. On a vu, à la section 1.5, quelques exemples d'autres problèmes stochastiques, mais il en existe cependant plus que ça et il n'est pas faux de croire qu'il en apparaîtra d'autres dans un proche avenir. En effet, en définissant ces problèmes, les chercheurs tentent de s'approcher de plus en plus de la réalité et nul doute que tout progrès dans cette direction ne peut qu'être bénéfique pour la collectivité en général puisqu'il permettra une meilleure planification et une utilisation plus rationnelle des ressources.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Andreatta, G. et Romeo, L. (1988), "Stochastic Shortest Paths with Recourse", Networks, à paraître.

[2] Bartholdi, J. J. et Platzman, L. K. (1982), "An 0(N log N) Planar Traveling Salesman Heuristic Based on Spacefilling Curves", Oper. Res. Let., Vol. 1, pp. 121-125.

[3] Bartholdi, J. J., Platzman, L. K., Collins, R. L. et Warden, W. H. (1983), "A Minimal Technology Routing System For Meals on Wheels", Interfaces, Vol. 13, pp. 1-8.

[4] Bastian, C. et Rinnooy Kan, A.H.G. (1988), "The Stochastic Vehicle Routing Problem Revisited", Report 8813/A, Erasmus University, Rotterdam, P.O. Box 1738, 3 000 Dr. Rotterdam, The Netherlands.

[5] Beardwood, J., Halton, J et Hammersley, J. (1959), "The Shortest Path Through Many Points", Proceedings Cambridge Philosophical Society, Vol. 55, pp. 299-327.

[6] Bellman, R. (1962), "Dynamic Programming Treatment of the Traveling Salesman Problem", J. Assoc. Comput. Machinery, Vol. 9, pp. 61-63.

[7] Berman, 0. et Simchi-Levi, D. (1986), "Minimum Location of a Traveling Salesman", Networks, Vol. 16, No. 3, pp. 329-354.

[8] Berman, O. et Simchi-Levi, D. (1988), "Finding the Optimal a Priori Tour and Location of a Traveling Salesman with Non-Homogeneous Customers", Transportation Science, Vol. 22, pp. 148-154.

[9] Bertsimas, D. J. (1988), "Probabilistic Combinatorial Optimization Problems", (Ph. D. Thesis) Technical Report No. 193, Operations Research Center, Massachusetts Intitute of Technology, Cambridge, MA.

[10] Bodin, L., Golden, B., Assad, A. et Ball, M. (1983), "Routing and Scheduling of Vehicles and Crews, the State of the Art", Comp. Oper. Res., Vol. 10, pp. 69-211.

[11] Christofides, N. (1976), "Worst-Case Analysis of a New Heuristic for the Traveling Salesman Problem", Management Sciences Research Report No. 388, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh.

[12] Clarke, G. et Wright, J. (1964), "Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points", Oper. Res., Vol. 12, pp. 568-581.

[13] Derman, C. et Klein, M. (1966). "Surveillance of Multi-Component Systems: a Stochastic Traveling Salesman Problem", Nav. Res. Log. Qua., Vol. 13, pp. 103-111.

[14] Dror, M., Laporte, G. et Trudeau, P. (1988), "Vehicle Routing With Stochastic Demands: Models and Issues", Report CRT-579, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, Montréal, Canada.

[15] Dror, M. et Trudeau, P. (1986), "Stochastic Vehicle Routing with Modified Savings Algorithm", Eur. Jour. Oper. Res., Vol. 23, pp. 228-235.

[16] Dror, M. et Trudeau, P. (1988), "Savings with Split Delivery Routing", Transportation Science, à paraître.

[17] Gilbert, E. (1965), "Random Minimal Trees", SIAM Jour., Vol. 13, pp. 376-387.

[18] Golden, B. et Assad, A. (1988), "Vehicle Routing; Methods and Studies", North Holland, Amsterdam.

[19] Golden, B. et Stewart, W. (1978), "Vehicle Routing with Probabilistic Demands", Dans Computer Science and Statistics: Tenth Annual Symposium on the Interface, éditeurs Hogben, D. et Fife, D., NBS Special Publication 503, pp. 252-259.

[20] Golden, B. et Yee, J. (1979), "A Framework For Probabilistic Vehicle Routing", AIIE Trans., Vol. 11, pp. 109-112.

[21] Haimovitch, M. et Rinnooy Kan, A. (1985), "Bounds and Heuristics for Capacitated Routing Problems", Math. Oper. Res., Vol. 10, pp. 527-542.

[22] Held, M. et Karp, R. (1962), "A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems", SIAM Rev., Vol. 10, No. 2, pp. 196-210.

[23] Jaillet, P. (1985), "Probabilistic Traveling Salesman Problem", (Ph.D. Thesis) Technical Report No. 185, Operations Resarch Center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

[24] Jaillet, P. (1987), "Stochastic Routing Problems", Dans Proceedings of CISM Advanced School on Stochastics and Optimization, éditeurs Andreatta, G. et Serafini, P., Springer-Verlag, Berlin.

[25] Jaillet, P. et Odoni, A. (1988), "The Probalistic Vehicle Routing Problem", Dans Vehicle Routing: Methods and Studies, éditeurs Golden, B. L. et Assad, A.A., North Holland, Amsterdam.

[26] Jezequel, A. (1986), "Probabilistic Vehicle Routing Problems", (S. M. Thesis), Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

[27] Kall, P. (1982), "Stochastic Programming", Eur. Jour. Oper. Res., Vol. 10, pp. 125-130.

[28] Kao, E. (1978), "A Preference Order Dynamic Program for Stochastic Traveling Salesman Problem", Oper. Res., Vol. 26, pp. 1033-1045.

[29] Karp, R. (1977), "Probabilistic Analysis of Partioning Algorithms for the Traveling Salesman in the Plane", Math. Oper. Re., Vol. 2, pp. 209-224.

[30] Kim, C. (1975), "A minimal Spanning Tree and Approximate Tours for a Traveling Salesman", Comp. Sci. Tech. Report, University of Maryland.

[31] Laporte, G. et Louveaux, F. (1987), "Formulations and Bounds for the Stochastic Capacitated Vehicle Routing Problem with Uncertain Supplies", Report No. G-87-23, Écoles des Hautes Études Commerciales, Université de Montréal, Montréal, Canada.

[32] Laporte, G., Louveaux, F. et Mercure, H. (1988) "Models and Exact Solutions for a Class of Stochastic Location-Routing Problems", Report No. G-87-14, Écoles des Hautes Études Commerciales, Université de Montréal, Montréal, Canada.

[33] Laporte, G. et Nobert, Y. (1987), "Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem", Dans Surveys In Combinatorial Optimizaton, éditeurs Martello, S., Laporte, G., Minoux, M. et Ribeiro, C., Annals of Discrete Mathematics, Vol. 31, North Holland, Amsterdam, pp. 147-184.

[34] Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. et Shmoys, D. B. (1985), "The Traveling Salesman Problem: A Guide Tour of Combinatorial Optimization ", Wiley, Chichester.

[35] Leipälä, T. (1978), "On the Solution of Stochastic Traveling Salesman Problems", Eur. Jour. Oper. Res., Vol. 2, pp. 291-297.

[36] Lin, S. (1965), "Computer Solution of the Traveling Salesman Problem", Bell System Tech. Jour., Vol. 44, pp. 2245-2269.

[37] Lin, S. et Kernighan, B. (1973), "An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem", Oper. Res., Vol. 21, pp. 498-516.

[38] Mitten, M. G. (1974), "Preference Order Dynamic Programming", Management Science, Vol. 21. pp. 43-46.

[39] Morin, T. L. et Marsten, R. E. (1976), "Branch-and-Bound Strategies for Dynamic Programming", Oper. Res., Vol. 24, pp. 611-627.

[40] Papadimitriou, C. H. (1978), "The Probabilistic Analysis of Matching Heuristics", Proceedings 15th Annual Conf. Comm. Contr. Computing, pp. 368-378.

[41] Simchi-Levi, D. et Berman, O. (1988), "Heuristics and Bounds for the Traveling Salesman Problem on the Plane", Oper. Res. Let., Vol. 5, pp. 243-248.

[42] Stewart, W. (1976), "The Delivery Truck Routing Problem with Stochastic Demands", ORSA/TIMS Joint National Meeting, Miami Beach, Florida.

[43] Stewart, W. (1981), "New Algorithms for Deterministic and Stochastic Vehicle Routing Problems", Working Paper #81-009, University of Maryland.

[44] Stewart, W. et Golden, B. (1979), "A Vehicle Routing Algorithm Based on Generalized Lagrange Multipliers", Proceedings AIDS 1979 Annual Convention, New Orleans, pp. 108-110.

[45] Stewart, W. et Golden, B. (1983), "Stochastic Vehicle Routing: A comprehensive Approach", Eur. Jour. Oper. Res., Vol. 14, No. 3, pp. 371-385.

[46] Stewart, W. R., Golden, B. L. et Gheysens, F., "A Survey of Stochastic Vehicle Routing", Working Paper MS/S, College of Business and Management, University of Maryland at College Park.

[47] Tillman, F. (1969), "The Multiple Terminal Delivery Problem with Probabilistic Demands", Transportation Science, Vol. 3, pp. 192-204.

[48] Wets, R. (1983), "Stochatic Programming: Solution Techniques and Approximation Schemes", Dans Mathematical Programming: State of the Art, éditeurs Bachem, A., Grotschel, M. et Korte, B., Springer-Verlag, Berlin, pp. 566-603.

[49] Yee, J. R. et Golden, B. L. (1980), "A Note on Determining Operating Strategies for Probabilistic Vehicle Routing", Nav. Res. Log. Qua., Vol. 27, pp. 159-163.